ÜBER DIE KONTRAKTION KREISFÖRMIGER FLÜSSIGKEITSSTRAHLEN.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN
FAKULTÄT DER KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT STRASSBURG
VORGELEGT

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

VON

ERICH TREFFTZ
AACHEN.

MIT 11 FIGUREN IM TEXT.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1914.

Referent: Professor Dr. H. Weber.

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 1913.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

Kapitel I.

Das Problem der vena contracta.

§ 1. Beschreibung der Ausflußerscheinungen. Formel von Toricelli 2
§ 2 Anwendung des Impulssatzes. Die Bordasche Mündung 6
§ 3. Die Methode von Helmholtz und Kirchhoff für das ebene Problem. 10
§ 4. Die Versuche von Bazin und das Resultat der vorliegenden Arbeit . . 13

Kapitel II.

Die Integralgleichung der axialsymmetrischen Strömung.

§ 1. Differentialgleichung und Randbedingungen 15
§ 2. Umformung mittels des Greenschen Satzes 18
§ 3. Die Quellringströmung 22
§ 4. Die Integralgleichung 26

Kapitel III.

Anwendung der Integralgleichung auf das Problem der vena contracta.

§ 1. Der Rechnungsgang bei gegebenem Strahlrande 29
§ 2. Bestimmung des Strahlrandes und der Kontraktionszahl durch sukzessive Approximation 34
§ 3. Konstruktion des vollständigen Strömungsbildes 36

Kapitel IV.

Numerisch-graphische Durchführung.

§ 1. Eine Vereinfachung der Formeln 40
§ 2. Die Strahlformen und die Integrationen 42
§ 3. Die Resultate der Integrationen. Genauigkeit des Verfahrens 47

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit behandelt das Problem des Wasserstrahls, der aus einer *kreisförmigen*, scharfkantigen Öffnung eines großen Gefäßes austritt. Die physikalischen Grundlagen, von denen ich ausgehe, sind die gleichen, wie in dem klassischen, von Helmholtz und Kirchhoff behandelten, ebenen Problem des Ausströmens eines *Wasserstreifens* aus einem langen, schmalen Spalte.

Mathematisch handelt es sich in beiden Fällen darum, die Randwertaufgabe einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu lösen, die wir erhalten, indem wir in die, im Raume geltende Gleichung $\Delta u = 0$ in jenem Falle die Voraussetzung der Unabhängigkeit von einer der rechtwinkligen Raumkoordinaten, in unserem Falle die Voraussetzung der axialen Symmetrie einführen. Für die Randwertaufgabe ist nun der Rand nicht durchweg der Gestalt nach gegeben, sondern zum Teil implizit durch eine Randbedingung bestimmt. Das axialsymmetrische Problem ist jedoch erheblich schwieriger, als das ebene, denn die Methode der *konformen Abbildung*, die beim ebenen Problem auf verhältnismäßig einfachem Wege eine exakte Lösung ermöglicht, hat *kein Analogon* für die Differentialgleichung im axialsymmetrischen Falle.

Die Methode zur Lösung, die ich anwende, und deren Resultat mit den Ergebnissen der Bazinschen Experimente gut übereinstimmt, gewinne ich, indem ich zunächst von der Differentialgleichung des Strömungspotentials zu einer Integralgleichung zwischen den Randwerten übergehe. Der Kern dieser Integralgleichung, der von der Form des Randes abhängt, ist dort unbekannt, wo der Rand nicht gegeben ist. Dafür hat man dort eine einfache Bedingung für die Lösung der Integralgleichung.

Zur Lösung des mit Hilfe der Integralgleichung formulierten Problems ergibt sich dann ein einfaches Verfahren *sukzessiver Approximation*. Einen Konvergenzbeweis für dieses Verfahren vermag ich nicht zu geben, doch erfüllt die von mir gegebene Lösung innerhalb der Grenzen der Genauigkeit, die durch die graphischen Integrationen bedingt sind, die geforderten Randbedingungen.

Erstes Kapitel.

Das Problem der vena contracta.

§ 1. Beschreibung der Ausflußerscheinungen. Formel von Toricelli.

Unter den Problemen, mit denen sich die mathematische Theorie der Bewegung inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeiten beschäftigt, nimmt das Problem der *Strahlbildung* beim Ausfluß von Wasser aus der kleinen Öffnung eines großen Gefäßes insofern eine bevorzugte Stellung ein, als hier die Voraussetzungen der Theorie idealer Flüssigkeiten mit großer Genauigkeit erfüllt sind.

1. Die Bewegung ist aus der Ruhe hervorgerufen durch Kräfte, die ein Potential haben, sodaß eine ideale Flüssigkeit nach dem Satze von Lagrange auf alle Fälle ein Geschwindigkeitspotential haben müßte.

2. Die Reibung, die die Potentialströmung stören würde, hat keinen großen Einfluß, denn an dem Strahlrand wird die Luft wie von einem festen Körper mitgeführt, was wegen der geringen Dichte der Luft nur sehr geringe Tangentialkräfte hervorrufen kann, und im Innern des Gefäßes nimmt die Geschwindigkeit sehr rasch mit der Entfernung von der Öffnung ab, sodaß die Reibung sich bloß in unmittelbarer Nähe der Öffnung bemerklich machen kann.

In der Tat erhält man unter der Voraussetzung der Potentialströmung in den bis jetzt integrierten, einfachen Fällen auch quantitativ durchaus befriedigende Resultate.

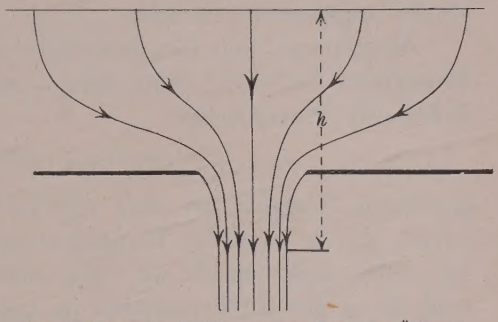
Diese bis jetzt erledigten Fälle beziehen sich — abgesehen von einigen allgemeinen Sätzen, von denen im zweiten Paragraphen die Rede sein wird, — durchaus auf den Fall, daß die Strömung nur von zweien der drei rechtwinkligen Raumkoordinaten abhängt; d. h. sie behandeln das „ebene“ Problem, das Strombild eines Wasser*streifens* zu bestimmen, der aus einem sehr langen („unendlich langen“) Spalte austritt.

Demgegenüber habe ich in der vorliegenden Arbeit versucht, das axialsymmetrische Problem zu lösen, d. h. den Strahl zu bestimmen, in dem eine inkompressible Flüssigkeit aus der *kreisförmigen* Öffnung im horizontalen Boden eines großen Gefäßes ausfließt.

Ehe ich mich dem speziellen Problem zuwende, möchte ich zunächst das allgemeine Problem darstellen, und kurz auf die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen eingehen.

Der Bewegungsvorgang, um den es sich handelt, ist der folgende: In der Wand oder in dem Boden eines Gefäßes befindet sich in einiger Entfernung unterhalb des Wasserspiegels eine Öffnung, aus der die Flüssigkeit unter der Wirkung der Schwere oder eines Überdrucks im Gefäße austritt. Im Innern des Gefäßes strömt die Flüssigkeit von allen Seiten auf die Öffnung zu. Da die Richtung der Geschwindigkeit längs der Begrenzungsfläche dieser parallel sein muß, und ein Sprung in der Richtung nicht eintreten kann, wenn der Druck endlich bleibt, so muß die Flüssigkeit an der Kante des Gefäßes tangential austreten. Die zur Mitte des Strahls gerichtete Geschwindigkeitskomponente nimmt aber rasch ab, sodaß die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen in einiger Entfernung von der Öffnung als gleichgerichtet betrachtet werden dürfen (speziell also als vertikal, wenn die Öffnung sich in dem horizontalen Boden eines Gefäßes befindet).

Fig. 1.



Schnitt durch ein Gefäß und den durch die Öffnung abfließenden Strahl.

Die eigentlich für die Anwendungen wichtige Frage ist nun die nach der *Wassermenge*, die bei einer bestimmten Öffnung pro Zeiteinheit ausfließt, wenn das Wasser im Gefäß eine gegebene Höhe hat.

Den ersten Schritt zur Beantwortung dieser Frage tat Toricelli, indem es ihm gelang, für die Geschwindigkeit des austretenden Wassers die nach ihm benannte Formel

$$v = \sqrt{2gh}$$

zu finden, wo g die Beschleunigung der Schwere und h die Entfernung des betrachteten Flüssigkeitsteilchens vom Wasserspiegel ist.

Die Formel von Toricelli ist für uns heute eine Folgerung aus dem Energiesatze, der für die stationäre Bewegung in der sogenannten „Bernoullischen“ Gleichung seinen Ausdruck findet. Diese Gleichung besagt, daß für jede einzelne Stromlinie:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - h = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} = \text{const.}$$

ist, wo γ das spezifische Gewicht, p der Überdruck über den Druck

der Atmosphäre, und p_0 und v_0 Druck und Geschwindigkeit an der Stelle sind, wo $h = 0$ ist. Für den von der Schwere erzeugten Strahl ist $h = 0$ die Wasseroberfläche im Gefäß, wo $p = 0$ ist und bei hinreichender Größe des Gefäßes auch $v = 0$ gesetzt werden kann. Die Formel von Toricelli folgt dann für $p = 0$. Das gilt streng stets am Rande des Strahles, und kann in hinreichender Entfernung, wo die Stromlinien wesentlich parallel sind, auch über den ganzen Strahlquerschnitt angenommen werden.

Würde man nun den Querschnitt F des Strahles an einer solchen, hinreichend entfernten Stelle kennen, so könnte man die pro Zeiteinheit abfließende Wassermenge:

$$Q = F \cdot v = F \cdot \sqrt{2gh}$$

berechnen. Gegeben ist aber von vornherein nur der Mündungsquerschnitt F_0, in dem die Voraussetzung $p = 0$ der Toricellischen Formel sicher nicht erfüllt ist. Man weiß nur, daß $Q < F_0 \sqrt{2gh_0}$ sein muß, da in der Mündungsebene im Innern der Flüssigkeit ein größerer Druck, also eine kleinere Geschwindigkeit herrschen muß, als am Rande.

In der technischen Literatur ist es üblich:

$$Q = \alpha F_0 \cdot \sqrt{2gh_0}$$

zu setzen, womit als neue Unbekannte die „Ausflußzahl"

$$\alpha = \frac{Q}{F_0 \cdot \sqrt{2gh_0}}$$

eingeführt ist.

Bei einem Strahl, der lediglich durch einen Überdruck im Gefäße erzeugt ist, hat die Ausflußzahl noch eine einfache geometrische Bedeutung. Diesen Fall, bei dem wir also von der Wirkung der Schwere absehen, wollen wir als den *„schwerelosen Fall"* bezeichnen. Hierfür gewinnen wir aus der Bernoullischen Gleichung, indem wir $g = 0$ setzen:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho},$$

wo ϱ die Dichte der Flüssigkeit und p_0 der die Bewegung erzeugende Überdruck im Gefäße ist. Setzen wir in dieser Formel $p = 0$, so erhalten wir für die Geschwindigkeit an den Stellen des Strahles, wo die Stromlinien schon wesentlich parallel sind:

$$v = \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}}.$$

Streng gültig ist auch diese Formel stets am Rande des Strahles.

Im Unterschied zum schweren Strahle, bei dem die Geschwindigkeit des fallenden Wassers ständig zunimmt, und infolgedessen der Strahlquerschnitt sich mehr und mehr verengen muß, nähert sich hier die Geschwindigkeit der konstanten Größe $\sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}}$; infolgedessen muß sich auch der Strahlquerschnitt einer konstanten Größe nähern, die wir mit F_∞ bezeichnen wollen.

Die abfließende Wassermenge ist dann:

$$Q = F_\infty \cdot \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}}.$$

Da wieder F_∞ zunächst nicht gegeben ist, führt man genau wie früher die Ausflußzahl α ein, indem man setzt:

$$Q = \alpha \cdot F_0 \cdot \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}}.$$

Daraus folgt:

$$\alpha = F_\infty : F_0,$$

d. h. die Ausflußzahl ist gleich dem Verhältnis der Fläche des kontrahierten Strahles zur Fläche der Öffnung. Man spricht deshalb auch von der *„Kontraktionszahl"* α.

Die Einführung der Ausflußzahl α, die zunächst eine Vereinfachung der Fragestellung nicht zu bedeuten scheint, da α außer von der Form und Lage der Öffnung auch noch von der Höhe des Wasserspiegels im Gefäße abhängt, rechtfertigt sich dadurch, daß, bei gegebener Öffnung, die Veränderungen von α erfahrungsgemäß nur gering sind, solange die Abmessungen der Öffnung klein sind gegen die Abmessungen des Gefäßes und die Höhe des Wasserspiegels.

Ist der Wasserspiegel im Gefäße hoch, so wird für den schweren Strahl in der Nähe der Öffnung die prozentuale Änderung der Geschwindigkeit klein. Mit wachsender Höhe des Wasserspiegels wird sich also in der Nähe der Öffnung das Strombild dem Strombild des schwerelosen Falles nähern, für den auf dem Rande konstante Geschwindigkeit vorgeschrieben ist. Auch diese Betrachtung ist experimentell bestätigt. Schon bei einer Höhe des Wasserspiegels, die etwa das fünffache des Öffnungsdurchmessers beträgt, erreicht die Ausflußzahl einen Wert, dessen Abweichungen von dem schließlichen Grenzwerte so gering sind, daß sie innerhalb der Fehlergrenzen liegen, die durch den störenden Einfluß der Reibung bedingt sind.

Hieraus ersehen wir, daß es nicht nur theoretisch von Interesse ist, wenn wir uns zunächst die Aufgabe stellen, für den schwerelosen

Fall die Kontraktionszahl zu ermitteln. Auch die Methoden von Helmholtz und Kirchhoff beim ebenen Problem sind nur auf diesen Fall anwendbar.

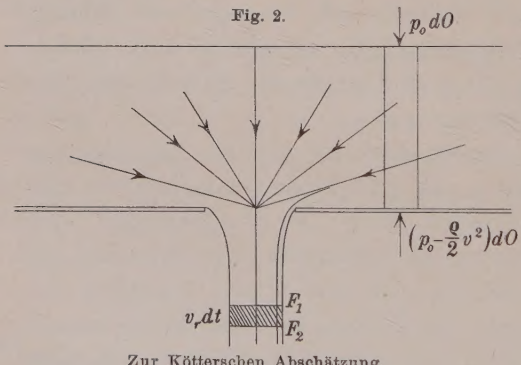
§ 2. Anwendung des Impulssatzes. Die Bordasche Mündung.

Die Berechnung des Kontraktionskoeffizienten ist der Gegenstand der Bemühungen zahlreicher Forscher gewesen. Auf die zahlreichen Versuche, mit Hilfe spezieller, nicht in den Grundgleichungen der Hydrodynamik begründeter Annahmen zu einem Resultate zu gelangen, will ich hier nicht eingehen. Man findet eine Besprechung derselben in dem Aufsatz: „Über die contractio venae“ von F. Kötter in Grunerts Archiv für Mathematik und Physik (zweite Reihe Bd. 5.). Ich will hier nur die Resultate erwähnen, die ohne solche spezielle Annahmen aus den hydrodynamischen Gleichungen folgen. Entsprechend den im vorigen Paragraphen gemachten Bemerkungen beschränken wir uns jetzt auf den schwerelosen Fall und setzen voraus, daß die Abmessungen des Gefäßes und die Höhe des Wasserspiegels groß genug sind, so daß wir den Einfluß der Wände und die Senkung des oberen Wasserspiegels vernachlässigen können.

Die Öffnung des Gefäßes befinde sich in der *horizontalen* Begrenzungsebene des Gefäßes.

Wir erhalten jetzt eine Abschätzung für die Kontraktionszahl, wenn wir den sogenannten *Impulssatz* auf das System anwenden.

Fig. 2.



Zur Kötterschen Abschätzung.

Der Impulssatz besagt, daß die auf eine Flüssigkeitsmasse wirkenden Kräfte dem Zuwachs an Bewegungsgröße gleich sind, den diese Flüssigkeitsmasse pro Zeiteinheit erhält.

Wir betrachten nun die gesamte Wassermasse im Gefäße und begrenzen sie unten im Strahle durch einen Querschnitt F_1, der so weit unten liegt, daß über ihn hin die Geschwindigkeit konstant gleich $\sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}}$ gesetzt werden kann. Nach der Zeit dt hat sich dieser Querschnitt um das Stück $dt \cdot \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}}$ gesenkt bis zum Querschnitt F_2. Bei hinreichend großem Gefäße ist dann im Innern des Gefäßes der Zustand

der Wassermasse als zeitlich konstant anzusehen, der Impulsgewinn während der Zeit dt ist also lediglich gleich dem Impuls der von den Querschnitten F_1 und F_2 begrenzten Wassermasse. Dieser ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, also gleich:

$$\varrho F_1 \cdot \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}} \cdot dt \propto \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}} = 2p_0 F_1 dt.$$

Dies ist den auf die Flüssigkeit wirkenden äußeren Kräften gleichzusetzen. Da längs des Strahles und über den Querschnitt F $p = 0$ ist, so wirken als äußere Kräfte nur der nach unten wirkende Überdruck p_0 auf die Oberfläche im Gefäße, und, nach oben wirkend, der Druck vom Boden her, der nach der Bernoullischen Gleichung:

$$p = p_0 - \frac{\varrho v^2}{2}$$

ist.

Nun erkennen wir, daß dem Drucke $p_0 \cdot d0$ auf ein Flächenelement der Oberfläche von dem gegenüberliegenden Flächenelement des Gefäßbodens her durch den dort nach oben wirkenden Teil $p_0 \cdot d0$ des Druckes gerade das Gleichgewicht gehalten wird. Es bleibt also vom Boden her nur der Teil des Druckes übrig, der von dem Gliede $-\frac{\varrho v^2}{2}$ in der Druckgleichung herrührt, also $-\int \frac{\varrho v^2}{2} d0$. Von der Oberfläche der Flüssigkeit bleibt der Teil des Druckes, der über der Öffnung im Boden wirksam ist, da diesem nicht von unten her das Gleichgewicht gehalten wird. Dieser ist:

$$F_0 \cdot p_0.$$

Die gesamte nach unten wirkende Kraft ist also gleich:

$$p_0 F_0 + \int \frac{\varrho v^2}{2} d0,$$

und wir erhalten als Ausdruck des Impulssatzes die Gleichung:

$$2F_1 p_0 = p_0 F_0 + \frac{\varrho}{2} \int v^2 d0.$$

Nun ist links, da der Querschnitt F_1 weit von der Öffnung entfernt ist:

$$F_1 = F = \alpha F_0.$$

Wir erhalten also:

$$\alpha = \frac{F_1}{F_0} = \frac{1}{2} + \frac{\varrho}{4p_0 F_0} \int v^2 d0.$$

Durch Unterdrücken des sicher positiven zweiten Gliedes auf der rechten Seite erhalten wir die erste Abschätzung

$$\alpha > \frac{1}{2}.$$

Für eine kreisförmige Öffnung kann man diese Abschätzung noch verschärfen, indem man für das Integral noch eine untere Grenze ermittelt. Dazu dient die folgende Betrachtung: Würde die gesamte Wassermenge im Mittelpunkte der kreisförmigen Öffnung abfließen, so wären die Stromlinien, in denen das Wasser fließt, gerade Linien, die im Innern des Gefäßes von allen Seiten auf diesen Punkt hinweisen. Für die wirkliche Strömung sind diese Geraden Asymptoten der Stromlinien. Nun sieht man, daß an der Kante der Öffnung und längs der Begrenzung die wirklichen Stromlinien aus der Richtung der genannten Geraden nach *unten* abweichen. Die Stromlinien werden also am Rande zusammengedrängt, d. h.: Die wirkliche Geschwindigkeit ist größer, als die Geschwindigkeit wäre, wenn alles Wasser im Mittelpunkte abströmte. (Vgl. Fig. 2.)

Es sei nun R der Radius der kreisförmigen Öffnung, r der Abstand eines beliebigen Punktes vom Öffnungsmittelpunkte. Dann ist die Geschwindigkeit w der Strömung im Gefäße, wenn pro Zeiteinheit die Wassermenge Q durch den Öffnungsmittelpunkt abströmt:

$$w = \frac{Q}{2\pi r^2},$$

und es ist also

$$v > w.$$

Aus der oben aufgestellten Gleichung folgt dann:

$$\alpha = \tfrac{1}{2} + \frac{\varrho}{4 p_0 F_0} \int v^2 d0 > \tfrac{1}{2} + \frac{\varrho Q^2 2\pi}{4 p_0 F_0 4\pi^2} \int \frac{r\,dr}{r^4},$$

wobei wir als Flächenelement einen mit dem Mittelpunkte der Öffnung konzentrischen Kreisring genommen haben. Wir integrieren und erhalten

$$\alpha > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \frac{\varrho Q^2}{p_0 F_0 2\pi} \cdot \frac{1}{2R^2}.$$

Nun ist:

$$Q = \alpha \cdot F_0 \cdot \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}}, \qquad F_0 = \pi R^2,$$

$$\varrho Q^2 = 2\alpha^2 \pi R^2 p_0 F_0, \qquad \frac{\varrho Q^2}{2\pi p_0 F_0 R^2} = \alpha^2.$$

Daraus folgt:

$$\alpha > \tfrac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{8} \text{ oder } \alpha > 0{,}5 + 0{,}125\,\alpha^2$$

und, da α ein echter Bruch ist:

$$\alpha > 4 - \sqrt{12}$$

oder

$$\boldsymbol{\alpha > 0{,}535.}$$

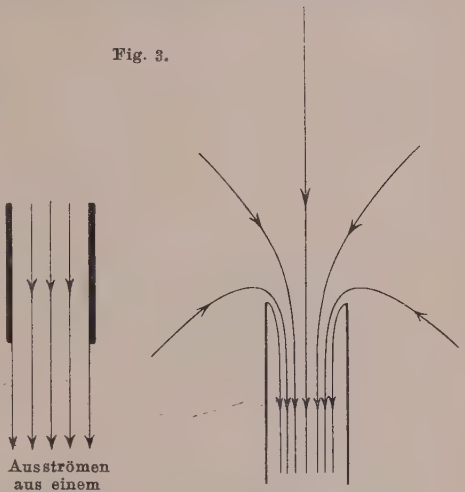
Durch etwas kompliziertere Betrachtungen, mit deren Hilfe er das Integral $\int v^2 d0$ auch nach oben abschätzt, gewinnt Kötter in seinem erwähnten Aufsatze auch eine obere Grenze für α nämlich:

$$\alpha < 0{,}71.$$

Die Anwendung des Impulssatzes läßt sich auch auf andere Fälle ausdehnen, z. B. auf den Ausfluß aus einem Trichter. Die Gleichung für α bleibt dieselbe, nur bedeutet $d0$ jetzt die *Horizontalprojektion* eines Flächenelements des Bodens.

Zu einem besonders bemerkenswerten Ergebnisse führt die Rechnung in dem *Extremfalle*, wenn die Austrittstangente vertikal steht, d. h. wenn die Flüssigkeit in eine vertikale Röhre von oben hineinströmt. Dann ist nämlich die Horizontalprojektion der Begrenzung Null $d0 = 0$, das Integral auf der rechten Seite fällt fort, und wir erhalten genau $\alpha = 0{,}5$, und zwar unabhängig von der Form des Röhrenquerschnitts. Dieses wichtige Resultat verdankt man Borda, der auch die ersten Experimente darüber angestellt hat, die den theoretischen Wert befriedigend bestätigten. (Borda, Mém. de l'Acad. des Sciences,. 1766.) Der von ihm experimentell gefundene Wert ist 1 : 1,94 statt 1 : 2. (Zitiert nach Lamb, Hydrodynamics Kap. II § 24.)

Fig. 3.



Ausströmen aus einem vertikalen Rohre. $\alpha = 1$

Einströmen in ein vertikales Rohr (Borda). Die Fälle und $\alpha = 0{,}5$.

In dem trivialen Falle, daß Wasser aus einer vertikalen Röhre nach unten herausströmt, erhalten wir, ebenfalls unabhängig von dem Querschnitt der Röhre $\alpha = 1$, weil selbstverständlich alles parallel bleibt.

Es liegt nun nahe, zu vermuten, daß diese Unabhängigkeit von der Form des Querschnitts nicht nur für diese einfachen Fälle gilt, sondern zum mindesten angenähert auch für den wichtigen Zwischenfall des horizontalen Bodens. Von diesem Gesichtspunkte aus wird es als wertvoll erscheinen, bei scharfkantigen Öffnungen im horizontalen Boden die Übereinstimmung der Kontraktionszahlen für kreisförmige und sehr lange spaltförmige Öffnungen auch theoretisch festzustellen. Dieses Resultat habe ich tatsächlich erhalten. Ich komme darauf im letzten Abschnitt dieses Kapitels zurück.

§ 3. Die Methode von Helmholtz und Kirchhoff für das ebene Problem.

Die im letzten Paragraphen genannten Resultate enthalten alles, was man mit alleiniger Anwendung der beiden allgemeinen Sätze der Hydrodynamik, Energiesatz und Impulssatz, über den Kontraktionskoeffizienten schließen kann.

Die ersten, die darüber hinaus zu exakten Partikularlösungen gelangten, waren Helmholtz und Kirchhoff[1]), indem sie, wie schon bemerkt wurde, die vereinfachende Voraussetzung machten, daß das Problem nur von zwei rechtwinkligen Koordinaten abhängen solle. Dadurch reduziert sich die Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential auf die Gleichung für das sogenannte logarithmische Potential in der Ebene:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

wobei also die Komponenten der Geschwindigkeit in der x- und y-Richtung:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

sind. Durch diesen Ansatz werden die Eulerschen Gleichungen bekanntlich identisch befriedigt.

Zu den genannten Gleichungen treten für den schwerelosen Fall die folgenden Randbedingungen:

1. An der festen Wand und längs des Strahlrandes muß die Geschwindigkeitskomponente normal zur Berandung verschwinden, d. h. es muß: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sein.

2. Längs des Strahlrandes muß gemäß der Bernoullischen Gleichung der Absolutbetrag der Geschwindigkeit:

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \text{const.}$$

sein. Da die Differentialgleichung und die Randbedingungen linear sind, genügt es, die Gleichung für den Fall $u^2 + v^2 = 1$ zu integrieren; die allgemeine Lösung erhält man dann durch Multiplikation mit einer Konstanten. Wir erhalten also die zweite Randbedingung für den Strahlrand in der Form:

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Die früher von uns gestellte Forderung, daß die Abmessungen der Öffnung klein sein sollten gegenüber den Abmessungen des Gefäßes

1) Vgl. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen, 4. Auflage Bd. II p. 453 ff.

und der Höhe des Wasserspiegels, wird mathematisch dahin präzisiert, daß das Gefäß als seitlich unbegrenzt angenommen wird, und von der Flüssigkeit vorausgesetzt wird, daß sie den ganzen Raum oberhalb der Begrenzungsebene ausfüllen soll. Die Schwierigkeit der Integration liegt darin, daß die Form des Strahlrandes nicht gegeben ist.

Der Gedankengang, der hier zur Lösung führt, ist der folgende: Neben dem Geschwindigkeitspotential φ wird die zu φ konjugierte Potentialfunktion ψ eingeführt, die durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

definiert ist. Die Kurven $\psi = \text{const.}$ haben, wie man leicht sieht, überall die Richtung der Geschwindigkeit, geben also in dem von uns betrachteten stationären Falle die Bahnkurven der Flüssigkeitsteilchen an. Es ist danach klar, daß der feste Rand und die anschließenden Strahlränder Stromlinien $\psi = \text{const.}$ sind.

Fassen wir, um uns klarer ausdrücken zu können, das spezielle Problem ins Auge, daß ein Wasserstreifen aus einem langen Spalte in einer *horizontalen* Ebene austrete, so sind die Koordinaten x und y die Abstände eines Punktes von der Symmetrieebene des Problems und von der horizontalen Begrenzungsebene.

Setzen wir nun zunächst über den Maßstab, in dem wir die x und y messen, noch nichts voraus, so können wir festsetzen, daß auf der Begrenzungswand und auf dem anschließenden Strahlrand links $\psi = 0$, rechts $\psi = \pi$ sein soll.

Faßt man x und y zu der komplexen Variablen $z = x + iy$ und φ und ψ zu der komplexen Variablen $\Omega = \varphi + i\psi$ zusammen, so folgt aus den Differentialgleichungen, daß Ω eine komplexe Funktion von z ist, deren Ableitung $w = \frac{d\Omega}{dz} = u - iv$ wird. Deutet man sich also φ und ψ als rechtwinklige Koordinaten in einer zweiten Ebene, und ebenso u und v in einer dritten Ebene, so sind diese drei Ebenen konform aufeinander abgebildet. Unsere Aufgabe wird nun dadurch gelöst, daß wir zunächst von der xy-Ebene ganz absehen, und die Beziehung verfolgen, die durch unser Problem zwischen der $\varphi + i\psi$-Ebene und der $u - iv$-Ebene definiert ist. Das ist möglich, weil die Randbedingungen: $u^2 + v^2 = 1$ auf dem Strahlrand und $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, d. h. $v = 0$ an der festen Wand die Koordinaten x und y nicht explizit enthalten.

In der Ω-Ebene ist das Strömungsbild der xy-Ebene auf den unendlichen Streifen zwischen $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ abgebildet, denn diese Werte hatten wir ja dem Rand der Strömung rechts und links beigelegt.

In der w-Ebene ist das Bild der von der Strömung erfüllten Fläche eine Halbkreisfläche, denn am festen Rande ist $v = 0$, und auf dem Strahlrande sollte $u^2 + v^2 = 1$ sein. Das ergibt die obere Hälfte des Einheitskreises; die obere, weil v offenbar überall negativ ist.

Setzen wir noch fest, daß das nur bis auf eine additive Konstante bestimmte Potential an den Ansatzpunkten des Strahles null werden soll, so ist unser Problem auf die folgende Abbildungsaufgabe zurückgeführt:

Fig. 4.

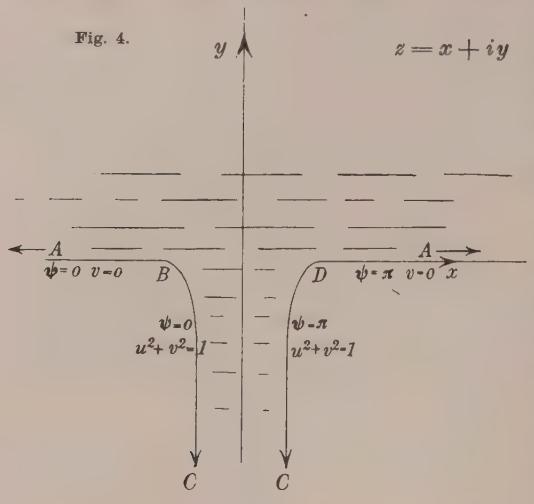


Fig. 5.

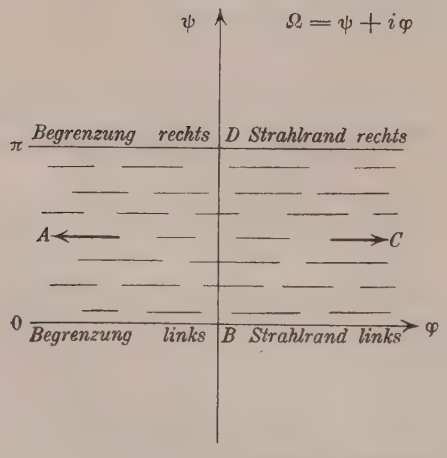
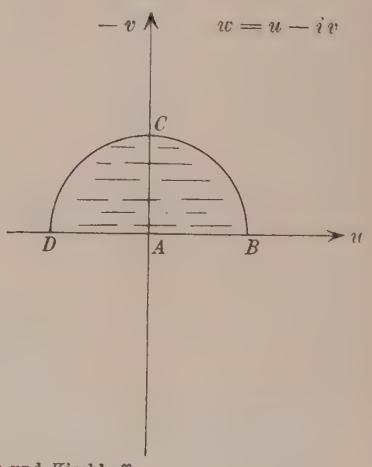


Fig. 6.



Zur Methode von Helmholtz und Kirchhoff.

Die $\varphi\psi$-Ebene und die uv-Ebene sollen durch eine komplexe Funktion so auf einander abgebildet werden, daß die Fläche der positiven Hälfte des Einheitskreises in der uv-Ebene in den Streifen $0 \leqq \psi \leqq \pi$ der $\varphi\psi$-Ebene übergeht, und zwar in der Weise, daß die beiden Punkte $u = \pm 1$, $v = 0$ in die Punkte $\varphi = 0$, $\psi = 0$ und $\varphi = 0$, $\psi = \pi$, und der Punkt $u = 0$, $v = 0$ in den linken unendlich fernen Punkt des Streifens übergeführt werden. (In der Figur sind sich entsprechende Punkte durch gleiche Buchstaben bezeichnet).

Diese Abbildungsaufgabe läßt sich verhältnismäßig einfach lösen, und auch die Integrale, die den Zusammenhang mit der xy-Ebene herstellen, lassen sich ausführen. Für die endgültigen Formeln möchte ich auf Lamb verweisen (Kapitel IV § 75.). Der sich ergebende Kontraktionskoeffizient $\alpha = 0{,}611$ stimmt mit den Experimenten befriedigend überein.

Bei einer Änderung der Randbedingungen versagt diese Methode; für den durch die Schwere erzeugten Strahl ist sie z. B. schon nicht mehr anwendbar.

Daß die Methode sich nicht auf den axialsymmetrischen Fall übertragen läßt, liegt daran, daß in diesem Falle die Differentialgleichungen nicht mehr die einfachen Eigenschaften haben, die in der konformen Abbildung ihren anschaulichen Ausdruck finden. Insbesondere führt schon die Umkehrung der Differentialgleichungen, d. h. die Aufstellung der Differentialgleichungen von x und y als Funktionen von φ und ψ nicht mehr wie beim ebenen Problem auf lineare Gleichungen. (Vgl. hierzu § 3 im dritten Kapitel.)

Die mathematische Methode für den axialsymmetrischen Fall wird also vollständig verschieden sein müssen von der eben dargestellten für das ebene Problem.

Wesentlich ist, daß wir von denselben Voraussetzungen ausgehen, wie oben, ohne irgendwelche weiteren, willkürlichen Annahmen hinzuzufügen.

Wir können also unsere Aufgabe folgendermaßen formulieren: Es soll die Kontraktion eines Strahles von *Kreisquerschnitt* auf derselben physikalischen Grundlage bestimmt werden, auf der die Helmholtz-Kirchhoffsche Methode die Kontraktion für den Ausfluß aus einem *Spalt* berechnet.

§ 4. Die Versuche von Bazin und das Resultat der vorliegenden Arbeit.

Sehr sorgfältige Versuche über die Größe der Ausflußzahl (natürlich für den schweren Strahl) sind für horizontale kreisförmige Öffnungen von Bazin angestellt worden und in den Mémoires presentées par divers Savants à l'Academie des Sciences de l'Institut de France (Bd. 32, 2. Reihe, 1902) veröffentlicht. Auf Seite 11 dieser Arbeit gibt Bazin die folgenden Zahlen an:

In dem Boden eines sehr langen rechteckigen Gefäßes befindet sich am einen Ende in je ein Meter Entfernung von den drei abschließenden Wänden eine kreisförmige Öffnung, einmal von 20 cm, das andere Mal von 10 cm Durchmesser. Bei einem Wasserstand im

Gefäß von etwa 1 m Höhe über dem Boden ergaben sich die folgenden Werte für die Ausflußzahl:

Für die Öffnung von 10 cm Durchmesser $\alpha = 0{,}6063$

„ „ „ „ 20 „ „ $\alpha = 0{,}6035$

Der Unterschied in diesen beiden Werten ist auf die Wirkung der Reibung zurückzuführen. Man könnte zwar zunächst vermuten, daß die Nähe der Wände in beiden Fällen verschiedenen Einfluß ausübte. Aber dann müßte für die größere Öffnung, wo das Verhältnis von Wandentfernung zu Öffnungsdurchmesser kleiner ist, der größere Wert der Kontraktionszahl herauskommen; denn wenn bei festgehaltener Öffnung die Wände immer näher rückten, so würde man sich dem Falle des Ausflusses aus einer vertikalen Röhre, d. h. dem Werte $\alpha = 1$ mehr und mehr nähern. Zudem zeigen auch andere Experimente, daß bei einer Wandentfernung, die mehr als das drei- bis vierfache des Öffnungsdurchmessers beträgt, der Einfluß der endlichen Entfernung der Wand nicht mehr merklich ist.

Daß der Unterschied in den beiden Werten nur sehr gering ist, liegt daran, daß, wie wir oben gesehen haben, die störende Wirkung der Reibung überhaupt nur für ein kleines Gebiet in der Nähe der Öffnung in Betracht kommt. Außerdem heben sich noch zwei verschiedene Wirkungen der Reibung teilweise auf. Einerseits wirkt nämlich in der Nähe der Öffnung die Reibung verzögernd auf die Bewegung ein, und an der Begrenzungsfläche ruht die Flüssigkeit vollkommen. Diese ruhende Flüssigkeit wirkt nun an der Kante wie eine Abrundung, d. h. sie bewirkt eine Verbreiterung des austretenden Strahles, wodurch die ausfließende Wassermenge *vermehrt* wird. Der Energieverlust infolge der Reibung geschieht aber andererseits auf Kosten der kinetischen Energie, d. h. die Ausflußgeschwindigkeit wird *vermindert* und damit auch die ausfließende Wassermenge.

Das Resultat, das ich erhalte, stimmt mit den angegebenen Zahlen gut überein; die Kontraktionszahl wird danach $\alpha = 0{,}61$, wobei jedoch noch eine Unsicherheit in der folgenden Dezimalen liegt. Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist also:

$$\mathbf{0{,}60 \leqq \alpha \leqq 0{,}62.}$$

Ich habe schon oben darauf hingewiesen, daß dieser Wert mit dem von Kirchhoff für den langen Spalt ermittelten Wert 0,611 innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Methode übereinstimmt und habe gezeigt, wieso dieses Resultat von Wichtigkeit ist.

Wir wenden uns jetzt im zweiten Kapitel zur mathematischen Behandlung und zu der Methode, mit deren Hilfe ich das genannte Resultat erhalten habe.

Zweites Kapitel.

Die Integralgleichung der axialsymmetrischen Strömung.

§ 1. Differentialgleichung und Randbedingungen.

Wir gehen jetzt zu der mathematischen Behandlung des speziellen Problems über, das wir am Schlusse des dritten Paragraphen im ersten Kapitel folgendermaßen formuliert hatten:

Es soll die Kontraktion eines Strahles von Kreisquerschnitt auf derselben physikalischen Grundlage bestimmt werden, auf der die Helmholtz-Kirchhoffsche Methode die Kontraktion für den Ausfluß aus einem Spalte berechnet.

Wir machen demgemäß in Übereinstimmung mit der Helmholtzschen Theorie die folgenden Voraussetzungen 1. bis 4.

1. Wir setzen voraus, daß das Gefäß, aus dem die inkompressibele Flüssigkeit ausströmt, seitlich unbegrenzt sei, und daß die Flüssigkeit den ganzen Raum oberhalb der begrenzenden Ebene erfülle.

2. Wir sehen ab von der Wirkung der Schwere, d. h. wir nehmen an, daß die Flüssigkeit lediglich durch einen Überdruck im Unendlichen aus dem Gefäße getrieben werde.

3. Wir vernachlässigen die Wirkung der Reibung.

4. Wir nehmen an, daß die Strömung eine Potentialströmung sei, d. h. daß die Geschwindigkeit an jedem Punkte als Gradient einer skalaren Ortsfunktion darstellbar ist.

Hierzu tritt noch als charakteristische Voraussetzung für den kreisförmigen Strahl:

5. Wir nehmen an, daß die Strömung in den Ebenen vor sich geht, die durch die Symmetrieachse gehen (d. h. durch die Normale, die wir im Mittelpunkte der kreisförmigen Öffnung auf der Begrenzungsebene errichten).

Hiermit ist unser Problem vollständig bestimmt. Um es mathematisch formulieren zu können, führen wir Zylinderkoordinaten ein. Es sei x der Abstand eines Punktes von der Symmetrieebene, y der Abstand von der Begrenzungsebene. Ferner sei ϑ der Winkel zwischen einer festen, durch die Symmetrieachse gehenden Ebene und *der* Ebene, die durch den gegebenen Punkt und die Symmetrieachse geht. Der Radius der Öffnung sei gleich 1. Dann ist nach Voraussetzung 4. die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte (vektoriell geschrieben):

$$\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Das Potential φ ist dann nach Voraussetzung 5. nur von x und y ab-

hängig. Die beiden Komponenten der Geschwindigkeit in der x- und y-Richtung sind also: $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (was bei einem ebenen Probleme Definition des Ausdrucks grad φ ist).

Die Gleichung $\Delta \varphi = 0$, die das Potential erfüllen muß, um die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit darzustellen, lautet in Zylinderkoordinaten, wenn, wie aus Voraussetzung 4. und 5. folgt, φ nicht von ϑ abhängt

$$x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{I'}$$

(vgl. Lamb. Kap. V. § 94, S. 117).

Führen wir in der üblichen Weise für einen Vektor $\bar{r}$ in der xy-Ebene, dessen Komponenten r_x und r_y sind, das Symbol:

$$\operatorname{div} \bar{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y}$$

ein, so können wir die Gleichung (I') auch in der folgenden Form schreiben:

$$\operatorname{div}(x \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0. \tag{I''}$$

Zu der Differentialgleichung (I) treten nun noch die folgenden Randbedingungen, die mit den Randbedingungen für den Helmholtzschen Fall identisch sind.

(IIa) Längs der begrenzenden Wand, d. h. für $y = 0$, $x > 1$, sowie längs des Strahlrandes muß die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Begrenzung verschwinden, d. h. es muß $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sein.

(IIb) Längs des Strahlrandes muß $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1$ sein, wo dl das Bogenelement längs des Strahlrandes ist. Dies folgt genau wie früher aus der Druckgleichung: $p = p_0 - \frac{1}{2} \varrho (u^2 + v^2)$. Da auf dem Rande $p = 0$ ist, folgt $\sqrt{u^2 + v^2} = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right| = \text{const.}$ und diese Konstante können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 1 setzen, da Differentialgleichung und Randbedingungen wieder linear sind.

Die mathematische Aufgabe lautet also:

Es ist die Differentialgleichung (I) *zu integrieren und ein Strahlrand so zu bestimmen, daß*

(IIa) *längs der gesamten Berandung* $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ *und*

(IIb) *längs des Strahlrandes* $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1$ *ist.*

Daß im Unendlichen des Gefäßes die Geschwindigkeit wie $\frac{1}{r^2}$ verschwinden muß, ist der Ausdruck für die Forderung, daß durch jeden Querschnitt in der Flüssigkeit pro Zeiteinheit nur eine endliche Flüssigkeitsmenge fließen soll. (Dabei ist $r^2 = x^2 + y^2$ gesetzt.)

Die Randbedingung (IIa) nimmt die gleiche, einfache Gestalt an, wie im Helmholtzschen Falle, wenn wir auch hier wieder die Funktion ψ einführen, für die die Linien $\psi = \text{const.}$ die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen sind, die sogenannte Stokessche Stromfunktion. Mathematisch ist sie durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -x \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

definiert, die wir auch durch die einzige Gleichung:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = x \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad \text{oder} \quad \psi = \int x \frac{\partial \varphi}{\partial n}(t)\, dt$$

ersetzen können, wo t die Bogenlänge längs eines *beliebigen* Integrationsweges und n die Normale dazu ist. Dabei liege die Richtung der positiven Normalen zur Richtung wachsender t wie die x-Achse zur y-Achse.

Aus den Definitionsgleichungen folgt, daß im stationären Falle die Kurven $\psi = \text{const.}$ Stromlinien sind. Der y-Achse, die aus Symmetriegründen natürlich Stromlinie ist, legen wir den Wert $\psi = 0$ bei. Für einen beliebigen Punkt P gibt dann der Wert von ψ bis auf den Faktor 2π diejenige Wassermenge an, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche fließt, welche wir erhalten, indem wir eine beliebige Verbindungslinie des Punktes P und der y-Achse um die letztere rotieren lassen. (Siehe hierzu: Lamb Kap. V, S. 117.)

Im nächsten Kapitel werden wir von den folgenden beiden Formeln Gebrauch machen, die wir in bekannter Weise aus den oben stehenden Gleichungen folgern, oder, was im Grunde genommen dasselbe ist, durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Integral:

$$\int \operatorname{div}(x \operatorname{grad} \varphi)\, dF$$

direkt erhalten können.

Es ist:

$$\int x(t) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(t)\, dt = 0, \tag{IIIa}$$

wenn wir das Integral über eine geschlossene Kurve nehmen, in deren Innerem die Funktion φ endlich, stetig und zweimal differenzierbar ist, und der Differentialgleichung (I) genügt. Enthält das von der Kurve

eingeschlossene Gebiet eine Singularität der Funktion φ, so ist:

$$\int x(t) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(t)\, dt = \text{const.} \tag{IIIb}$$

und der Wert des Integrals bleibt derselbe, wenn wir die Kurve stetig deformieren, vorausgesetzt, daß hierbei ein für φ singulärer Punkt nicht überschritten wird.

Bei diesen und allen derartigen Integrationen wollen wir hier und auch später unter n stets die *äußere* Normale an das eingeschlossene Gebiet verstehen, und wollen den Umlaufssinn so wählen, daß entsprechend unserer oben getroffenen Festsetzung die äußere (positiv gerechnete) Normale für den in Richtung wachsender Bogenlänge t fortschreitenden zur Rechten liegt.

Es ist manchmal bequemer, mit den Gleichungen für ψ zu rechnen, statt mit dem Potential φ. So erhält z. B. die Randbedingung (IIa) unseres Problems die einfache Gestalt $\frac{\partial \psi}{\partial l} = 0$ oder $\psi = \text{const.}$

Durch Elimination von φ erhalten wir aus den beiden Definitionsgleichungen für ψ die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

die wir auch wieder in vektorieller Form:

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{x} \cdot \operatorname{grad} \psi\right) = 0$$

schreiben können.

§ 2. Umformung mittels des Greenschen Satzes.

Wir wollen jetzt eine Formel ableiten, in der wir die Werte einer Funktion, die der Differentialgleichung (I) $\operatorname{div}(x \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0$ genügt, und gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt, im Innern eines Gebietes der xy-Ebene darstellen, wenn die Werte von φ und die Werte der Normalableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf dem Rande des Gebietes gegeben sind. Wir benutzen dazu die folgende Formel aus der Vektoranalysis: Ist $\bar{r}$ ein Vektor, der eine Funktion von x und y sei, und p eine skalare Funktion von x und y, so ist:

$$\operatorname{div}(p \cdot \bar{r}) = p \cdot \operatorname{div} \bar{r} + (\bar{r} \cdot \operatorname{grad} p)$$

(der Ausdruck in der Klammer rechts ist das skalare Produkt von $\bar{r}$ und $\operatorname{grad} p$). Es seien jetzt $\varphi(xy)$ und $V(xy)$ zwei Funktionen, die der Differentialgleichung (I) genügen. Wir setzen dann einmal: $\bar{r} = x \cdot \operatorname{grad} V$, $p = \varphi$, danach: $\bar{r} = x \cdot \operatorname{grad} \varphi$, $p = V$, und erhalten:

$$\operatorname{div}(V \cdot x \operatorname{grad} \varphi) = V \operatorname{div}(x \operatorname{grad} \varphi) + (x \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} V)$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot x \operatorname{grad} V) = \varphi \operatorname{div}(x \operatorname{grad} V) + (x \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} \varphi).$$

Da hier die beiden zweiten Glieder der rechten Seiten gleich sind, so erhalten wir durch Subtraktion:

$$\operatorname{div}(V \cdot x \operatorname{grad}\varphi) - \operatorname{div}(\varphi \cdot x \operatorname{grad} V) = V \operatorname{div}(x \operatorname{grad}\varphi) - \varphi \operatorname{div}(x \operatorname{grad} V).$$

Integrieren wir nun über ein Gebiet, in dem sowohl $\varphi(xy)$ als $V(xy)$ und ihre ersten Differentialquotienten stetig, die zweiten Differentialquotienten wenigstens stückweise stetig sind, so ist, wenn φ und V der Differentialgleichung (I) genügen:

$$\text{(IV a)} \qquad \int [\operatorname{div}(V \cdot x \operatorname{grad}\varphi) - \operatorname{div}(\varphi \cdot x \operatorname{grad} V)]\, dF = 0,$$

und daraus folgt nach dem Gaußschen Satze:

$$\text{(IV)} \qquad \int \left(V \cdot x \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot x \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \right) dt = 0.$$

Dieses Integral ist über die gesamte Berandung des Gebietes G zu erstrecken. Für den Sinn, in dem wir die einzelnen Teile der Berandung durchlaufen, gelten unsere früheren Festsetzungen.

Wir betrachten jetzt ein Gebiet G, in dem φ die oben geforderten Bedingungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit erfüllt. Dabei beschränken wir uns natürlich auf ein Gebiet, das ganz auf einer Seite der y-Achse liegt, und zwar natürlich auf der Seite positiver x, da die Symmetrie zur y-Achse in der Natur unseres Problems liegt.

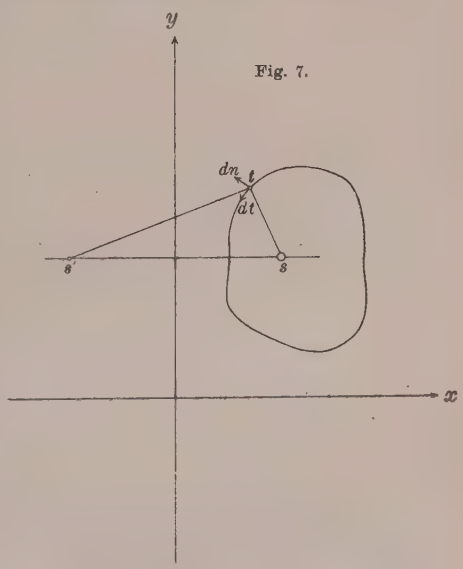


Fig. 7.

Wir verfahren jetzt genau, wie es in der Potentialtheorie üblich ist, und setzen für $V(xy)$ eine Funktion, die nur für *einen* innerhalb G liegenden Punkt P mit den Koordinaten $x = x_s$, $y = y_s$ eine logarithmische Singularität hat, sonst aber stetig und mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. Außerdem genüge sie natürlich der Differentialgleichung (I).

Eine solche Strömung können wir uns aber leicht konstruieren. Im Raume ist es diejenige Strömung, die ein mit Quellen gleichmäßig belegter Kreis erzeugt, dessen Ebene die Ebene $y = y_s$, dessen Radius gleich x_s ist, und dessen Mittelpunkt in der y-Achse liegt. Das Potential eines einzelnen Quellpunktes ist nun $-\frac{1}{r}$, wenn r die Entfernung

eines beliebigen Punktes von dem Quellpunkte ist. Hieraus erhalten wir durch Superposition das Potential des ganzen Quellringes. In Zylinderkoordinaten ist die Entfernung eines Punktes mit den Koordinaten $xy\vartheta$ von einem Punkte auf dem Quellkreise, dessen Koordinaten $x_s y_s \vartheta_s$ seien:

$$r = \sqrt{x_s^2 + x^2 - 2x_s x \cdot \cos(\vartheta - \vartheta_s) + (y_s - y)^2},$$

und wir erhalten das Potential des Quellringes durch Integration über ϑ_s

$$V(xy) = -\int_0^{2\pi} \frac{C d\vartheta_s}{\sqrt{x_s^2 + x^2 - 2x_s x \cos(\vartheta_s - \vartheta) + (y_s - y)^2}}.$$

Führen wir $\omega = \vartheta_s - \vartheta_t$ ein, so wird:

$$V(xy) = -\int_0^{2\pi} \frac{C d\omega}{\sqrt{x_s^2 + x^2 + (y_s - y)^2 - 2x_s x \cos\omega}}.$$

Setzen wir die zunächst noch willkürliche Konstante $C = \frac{1}{2}$ und beachten, daß der Integrand für die Werte ω und $2\pi - \omega$ den gleichen Wert hat, so können wir schreiben:

$$V(xy) = -\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{x_s^2 + x^2 + (y_s - y)^2 - 2x_s x \cos\omega}}.$$

Um unsere Formel (IV) auf das Gebiet G anwenden zu können, müssen wir den Punkt P, in dem $V(xy)$ eine Singularität hat, durch einen kleinen Kreis vom Radius ε aus G ausschließen. Das Integral ist dann auch über diesen Kreis zu erstrecken. Der Anteil des Integrals $\int \left(xV\frac{\partial\varphi}{\partial n} - x\varphi\frac{\partial V}{\partial n}\right)dt$, der auf den kleinen Kreis entfällt, ist leicht zu ermitteln. Da x und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ endlich bleiben, und V nur eine Singularität wie $\ln\varepsilon$ hat, während der Umfang des Kreises, über den wir integrieren, wie ε gegen Null geht, so verschwindet der erste Teil des Integrals, wenn wir ε gegen Null gehen lassen. Lassen wir in dem zweiten Teile des Integrales: $\int x\varphi\frac{\partial V}{\partial n}dt$ den Radius ε sehr klein werden, so geht φ gegen den Wert $\varphi(x_s y_s)$, und es wird:

$$\lim_{\varepsilon = 0}\left(-\int \varphi(xy) x \frac{\partial V}{\partial n} dt\right) = -\varphi(x_s y_s)\int x\frac{\partial V}{\partial n}dt.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nun nach Formel (IIIb) unabhängig von dem Wege, auf dem wir um den Punkt P herumgehen. Wir werten es aus, indem wir den Integrationsweg ins Unendliche ver-

schieben. Der verschobene Integrationsweg setze sich zusammen aus der y-Achse und aus einem sehr großen Halbkreise um den Punkt $y = y_s$, $x = 0$, auf der y-Achse, dessen Radius R sei.

Für sehr große Werte von R wird dann:

$$V = -\frac{\pi}{R},$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\pi}{R^2},$$

und es ist

$$x = R\cos\sigma, \quad dt = Rd\sigma,$$

(wo R und σ Polarkoordinaten in der xy-Ebene sind). Da für $x = 0$ $\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ wird, trägt die y-Achse nichts zu dem Integrale bei, und es bleibt bloß das Integral über den Halbkreis:

$$\int x\frac{\partial V}{\partial n}dt = -\int_{-\pi}^{+\pi}\pi\cos\sigma d\sigma = -2\pi.$$

Das negative Vorzeichen von $\frac{\partial V}{\partial n}$ rechtfertigt sich dadurch, daß wir unter n die äußere Normale verstanden hatten. Für den kleinen Kreis war nun die äußere Normale zum Gebiete G die zum Mittelpunkte des Kreises weisende Richtung. Diese Richtung der Normalen mußten wir natürlich festhalten, wenn wir den Integrationsweg ins Unendliche rückten.

Schreiben wir jetzt die Gleichung (IV) für das Gebiet G hin, so ist der von dem kleinen Kreise herrührende Teil gleich $-2\pi\varphi(x_s y_s)$ und wir erhalten, indem wir dies auf die linke Seite bringen:

$$\text{(V)} \qquad 2\pi\varphi(x_s y_s) = \int\varphi(t)x(t)\frac{\partial V(t)}{\partial n}dt - \int V(t)x(t)\frac{\partial\varphi(t)}{\partial n}dt,$$

wo die Integrale der rechten Seite nur noch über die *eigentliche* Berandung von G zu erstrecken sind.

Wir wollen noch eine Änderung der Bezeichnung einführen: Es bezeichne t auch weiterhin die Bogenlänge auf der Randkurve. Durch s wollen wir *irgend* einen Punkt im Inneren von G bezeichnen. $V(st)$ sei der Wert, den *die* Funktion V im Punkte t hat, für welche die logarithmische Singularität im Punkte s liegt.

Dann schreibt sich Gleichung (V):

$$\text{(V)} \qquad \varphi(s) = \frac{1}{2\pi}\int\varphi(t)x(t)\frac{\partial V(st)}{\partial n(t)}dt - \frac{1}{2\pi}\int V(st)x(t)\frac{\partial\varphi(t)}{\partial n(t)}dt.$$

Wir bemerken noch, daß, wenn das Gebiet G teilweise durch die y-Achse begrenzt wird, dieser Teil zu den Integralen in (V) nichts beiträgt, da für $x = 0$ aus Symmetriegründen sowohl $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ als $\frac{\partial V}{\partial n}$ Null wird. Ausgenommen ist natürlich der Fall, daß auf der y-Achse eine Quelle liegt.

§ 3. Die Quellringströmung.

Wir wollen jetzt den Ausdruck für die Funktion

$$V(st) = -\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{x_s^2 + x_t^2 - 2x_s x_t \cos\omega + (y_s - y_t)^2}},$$

der ein vollständiges elliptisches Integral erster Art ist, auf die Legendresche Normalform bringen, um ihn für die späteren Rechnungen brauchbar zu machen. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$r_1^2 = (x_s - x_t)^2 + (y_s - y_t)^2$$
$$r_2^2 = (x_s + x_t)^2 + (y_s + y_t)^2,$$

r_1 ist dann der Abstand des Punktes s von dem Punkte t, r_2 der Abstand des Punktes t von dem Spiegelbilde des Punktes s in Bezug auf die y-Achse, das wir mit s' bezeichnen wollen. In dem obenstehenden Integrale wird:

$$x_s^2 + x_t^2 + (y_s - y_t)^2 = \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$
$$2x_s x_t = \tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2).$$

Wir erhalten also:

$$V(st) = -\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{\frac{1}{2}(r_2^2 + r_1^2) - \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\cos\omega}} = -2\int_0^{\pi} \frac{d\frac{\omega}{2}}{\sqrt{r_1^2 \cos^2\frac{\omega}{2} + r_2^2 \sin^2\frac{\omega}{2}}}.$$

Transformieren wir hierin nach der Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels, indem wir:

$$\varrho(st) = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad \lambda = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$$

setzen, so wird:

$$V(st) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\varrho^2 \cos^2\sigma + \lambda^2 \sin^2\sigma}}, \qquad \left(\text{wo } \sigma = \frac{\omega}{2} \text{ ist}\right)$$

oder, indem wir von der symmetrischen zur eigentlichen Legendreschen Normalform übergehen:

$$V(st) = -\frac{2}{\varrho(st)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2 - \lambda^2}{\varrho^2} \sin^2\sigma}} = -\frac{2}{\varrho(st)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2\sigma}},$$

wo

$$\xi^2 = \frac{\varrho^2 - \lambda^2}{\varrho^2} = \frac{(r_2 - r_1)^2}{(r_2 + r_1)^2}$$

gesetzt ist, also

$$\xi = \frac{(r_2 - r_1)}{(r_2 + r_1)} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{(r_2 + r_1)^2} = \frac{x_s x_t}{\varrho^2}.$$

Bezeichnen wir das in der obenstehenden Formel vorkommende Integral durch $E(\xi)$, so können wir schreiben:

(VI) $$V(st) = -\frac{2E(\xi)}{\varrho(st)}.$$

Um die Größe $\frac{\partial V(st)}{\partial n(t)}$ zu berechnen, die wir für die Randwertdarstellung brauchen, setzen wir $V(st)$ in die Form:

$$V(st) = -2\sqrt{\frac{\xi}{x_s x_t}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - \xi^2 s^2)}}.$$

Differentiieren wir und bringen die Integrale auf die erste und zweite Legendresche Normalform, so erhalten wir:

$$\frac{\partial V(st)}{\partial n(t)} = \sqrt{\frac{\xi}{x_s}} \frac{1}{\sqrt{x_t^3}} E(\xi) \frac{\partial x(t)}{\partial n(t)}$$

$$-\left[\frac{1}{\sqrt{x_s x_t \xi}} E(\xi) + 2\sqrt{\frac{\xi}{x_s x_t}} \frac{\xi}{1 - \xi^2} \left(\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) E(\xi) + \frac{1}{\xi^2} F(\xi)\right)\right] \frac{\partial \xi}{\partial n_t},$$

wo

$$F(\xi) = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2\omega}\, d\omega$$

das elliptische Integral zweiter Gattung in der Legendreschen Normalform ist.

Ehe wir den Ausdruck weiter vereinfachen, wollen wir $\frac{\partial \xi}{\partial n}$ in eine etwas andere Form bringen. Wir zeichnen uns den Punkt x_s, y_s und sein Spiegelbild $x_s' = -x_s$, $y_s' = y_s$ und verbinden diese beiden Punkte durch die Strecken r_1 und r_2 mit dem Punkte $x_t y_t$. Dann ist, wenn wir in irgendeiner Richtung dt vom Punkte $x_t y_t$ fortschreiten, und n die zur Rechten liegende Normale ist (vgl. Fig. 9):

$$\frac{\partial \ln \frac{r_1}{r_2}}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta(st)}{\partial t},$$

wo $\vartheta(st)$ der Winkel ist, unter dem die Strecke ss vom Punkte $x_s y_s$ aus gesehen wird. Die Formel folgt daraus, daß $\ln \frac{r_1}{r_2}$ und ϑ Realteil und Imaginärteil einer analytischen Funktion von $x - iy$ sind. Setzen wir für $\frac{r_1}{r_2}$ seinen Wert $\frac{1-\xi}{1+\xi}$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{1+\xi}{1-\xi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right) = -2\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial \xi(st)}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta(st)}{\partial t},$$

also

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = -\frac{(1-\xi^2)}{2}\frac{\partial \vartheta(st)}{\partial (t)}.$$

Setzen wir diese Werte und $\frac{\partial x(t)}{\partial n} = \frac{\partial y(t)}{\partial t}$ in unsere Formel für $\frac{\partial V(st)}{\partial n\, dt}$ ein und multiplizieren noch mit $x(t)$, so erhalten wir:

$$x(t)\frac{\partial V(st)}{\partial n} = \sqrt{\frac{\xi}{x_s x_t}}\, E(\xi)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x_s}\sqrt{x_s x_t}\left(F(\xi) - \frac{1-\xi^2}{2}E(\xi)\right)\frac{\partial \vartheta(st)}{\partial t}.$$

Führen wir jetzt für den Ausdruck

$$F(\xi) - \frac{1-\xi^2}{2}E(\xi) = G(\xi)$$

die Bezeichnung $G(\xi)$ ein, und setzen wieder $\varrho = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \sqrt{\frac{\xi}{x_s x_t}}$, so wird:

(VIII) $$x(t)\frac{\partial V(st)}{\partial n} = \frac{1}{\varrho(st)}E(\xi)\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\varrho(st)}{x_s}G(\xi)\frac{\partial \vartheta(st)}{\partial t}.$$

Eine Tafel für $E(\xi)$ als Funktion von $\alpha = \arcsin \xi$ findet sich in den Funktionentafeln von Jahnke und Emde, ebenso für $F(\xi)$. Die am Schlusse der Arbeit wiedergegebene Tafel für $G(\xi)$ als Funktion von α ist aus diesen Tafeln berechnet.

Wir bemerken noch, daß wir in Formel (VII) wieder $\frac{1}{\varrho}E(\xi)$ gleich $-\frac{1}{2}V(st)$ setzen können. Es wird dann:

$$x(t)\frac{\partial V(st)}{\partial n} = -\frac{1}{2}V(st)\frac{\partial y(t)}{\partial t} + \frac{\varrho(st)}{x_s}G(\xi)\frac{\partial \vartheta(st)}{\partial t}.$$

Die Stromfunktion $S(st)$. In der gleichen Weise, wie wir früher zu einer beliebigen Potentialfunktion φ die Stromfunktion ψ durch die Gleichung:

$$\psi = \int_{x=0}^{x=t} x(t)\frac{\partial \varphi}{\partial n}dt$$

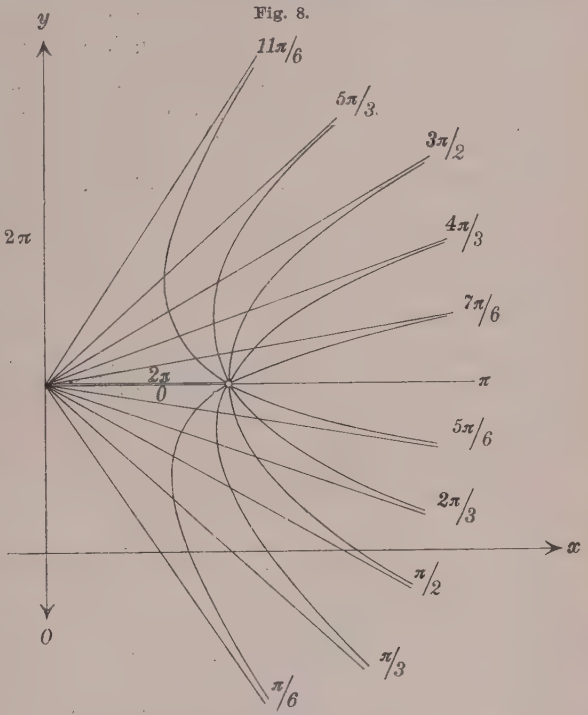
eingeführt hatten, können wir auch jetzt zu der Potentialfunktion $V(st)$, die im Punkte $x = x_s$, $y = y_s$ eine logarithmische Singularität hat, im

übrigen aber regulär ist, eine Stromfunktion einführen. Indem wir diese mit $S(st)$ bezeichnen, drücken wir aus, daß die betrachtete Stromfunktion an der Stelle $x = x_s$, $y = y_s$ eine Singularität haben soll; im übrigen ist sie als Funktion von t d. h. als Funktion der beiden Variablen x_t und y_t regulär. Es ist also:

$$S(st) = \int x(t) \frac{\partial V(st)}{\partial n} dt, \quad \frac{\partial S(st)}{\partial t} = x(t) \frac{\partial V(st)}{\partial n}.$$

Wir können uns leicht darüber Rechenschaft ablegen, wie die Linien $S(st) = \text{const.}$ aussehen. Es sind dies die Stromlinien für die Strömung aus dem Quellringe. Daß aus Symmetriegründen die y-Achse stets eine Stromlinie sein muß, haben wir bereits bemerkt. Außerdem muß noch, ebenfalls aus Symmetriegründen die Gerade $y = y_s$ Stromlinie sein. Wenn wir sehr dicht an den Punkt $x_s y_s$ herangehen, so nähert sich das Strombild dem Strombilde einer geraden Quelllinie. Die Stromlinien gehen also von dort aus in gleichen Winkelabständen nach allen Seiten auseinander (wie man auch direkt aus Gleichung (VII) erkennt). Davon teilt sich die Stromlinie, die längs der Geraden $y = y_s$ laufend, die y-Achse erreicht, im Punkte $x = 0$ $y = y_s$; ein Teil läuft entlang der y-Achse nach oben, der andere nach unten. Wir wollen speziell dem nach unten laufenden Teile den Wert $S = 0$ beilegen. Gehen wir in einiger Entfernung um den Punkt s herum, so kreuzen wir die Stromlinien, die, von s ausgehend, ins Unendliche verlaufen. Wir haben bereits früher gesehen, daß wir in hinreichender Entfernung von der Singularität $V(st)$ durch $-\frac{\pi}{R}$ ersetzen können, wo R der Ab-

Fig. 8.



Stromlinien $S(st) = \text{const.}$ für die Strömung aus einem Quellring.

stand eines Punktes von dem Punkte s ist. Die Stromfunktion wird also in dieser Entfernung:

$$S(st) = -\pi \int x(t) \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} dt = \frac{\pi(y - y_s)}{R} + \pi.$$

Wir sehen, daß der von dem Punkte s längs der Geraden $y = y_s$ nach rechts ins Unendliche laufenden Stromlinie der Wert $S(st) = \pi$ zukommt. Gehen wir noch weiter herum, bis zur y-Achse zurück, so wird $S = 2\pi$. Würden wir jetzt noch einmal um die Singularität herumgehen, so müßten wir auch dem nach unten laufenden Teile der y-Achse den Wert $S = 2\pi$ beilegen, und würden also beim zweiten Umlauf für den nach oben laufenden Teil der y-Achse den Wert 4π erhalten. Diese Vermehrung der Stromfunktion wiederholt sich bei jedem Umlaufe um den Punkt s. Wir haben hier also ein Beispiel für eine vieldeutige Stromfunktion, indem S für jeden Punkt bloß bis auf ein ganzes Vielfaches von 2π bestimmt ist. Diese Unbestimmtheit beheben wir, indem wir folgende Festsetzung treffen: Der nach unten laufende Teil der y-Achse erhält den Wert $S = 0$, desgleichen das Stück der Geraden $y = y_s$ zwischen der y-Achse und dem Punkte s, wenn wir uns ihm von unten nähern. Die nach oben laufende y-Achse aber und das genannte Geradenstück, wenn wir uns ihm von oben nähern, erhalten den Wert $S = 2\pi$. Längs des Geradenstückes $y = y_s$, $0 \leqq x \leqq x_s$ ist also die Stromfunktion unstetig.

Führen wir die Stromfunktion $S(st)$ in unsere Formeln (V) und (VII) ein, so erhalten wir:

$$(V) \qquad 2\pi\varphi(s) = \int \varphi(t) \frac{\partial S(st)}{\partial t} dt - \int V(st) \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} dt,$$

wo ψ die zu φ gehörige Stromfunktion ist. Dies können wir in leicht verständlicher Abkürzung schreiben:

$$(VI) \qquad 2\pi\varphi(s) = \int \varphi(t)\, dS(st) - \int V(st)\, d\psi(t).$$

Für $\frac{\partial S(st)}{\partial t}$ erhalten wir:

$$(VII) \qquad \frac{\partial S(st)}{\partial t} = x(t) \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{\varrho(st)} E(\xi) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\varrho(st)}{x_s} G(\xi) \frac{\partial \vartheta(st)}{\partial t}.$$

§ 4. Die Integralgleichung.

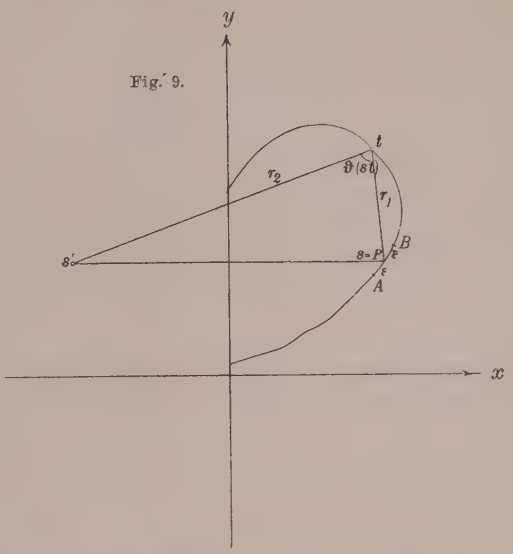
Im vorletzten Abschnitte hatten wir die folgende Formel gefunden, die den Wert des Strömungspotentiales in einem inneren Punkte s des

Gebietes G dargestellt, wenn das Potential und seine Normalableitung auf dem Rande von G gegeben sind:

$$\text{(V)} \qquad \varphi(s) = \frac{1}{2\pi}\int \varphi(t)\frac{\partial S(st)}{\partial t}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int V(st)\frac{\partial \psi}{\partial t}\,dt.$$

Wir wollen jetzt *den Punkt s selbst in den Rand rücken lassen.* Zu dem Zwecke grenzen wir den Punkt P, in den wir s rücken lassen wollen, durch zwei Punkte A und B, die von P den Abstand ε haben, ab, und zerlegen die über den Rand zu erstreckenden Integrale der Formel (V) je in zwei Teile, von B nach A über die P nicht enthaltenden Teile der Begrenzung, und von A bis B über den P enthaltenden Teil.

Fig. 9.



Wir betrachten zunächst die Integrale über den P nicht enthaltenden Teil von B bis A. φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ setzen wir als endlich voraus.

Das Integral:

$$\int_B^A V(st)\frac{\partial \psi}{\partial t}\,dt = \int_B^A V(st)\,x(t)\frac{\partial \varphi}{\partial n}\,dt$$

bleibt konvergent, auch wenn wir ε beliebig klein werden lassen, da $V(st)$ für $s = t$ nur eine logarithmische Singularität hat. Für das Integral:

$$\int_B^A \varphi(t)\,dS(st)$$

können wir nach Formel (VII) schreiben:

$$-\tfrac{1}{2}\int_B^A \varphi(t)\,V(st)\,dy(t) + \int_B^A \varphi(t)\int_{x_s}^{\varrho(st)} G(\xi)\,d\vartheta(st).$$

Das erste Integral konvergiert ebenfalls, weil $V(st)$ nur logarithmisch unendlich wird. Das zweite Integral konvergiert auch, da $G(\xi)$ für die in Betracht kommenden Werte von ξ: $0 \leqq \xi \leqq 1$ zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{4}$ und 1 bleibt. Wir müssen hier allerdings verlangen, daß

die Berandung des betrachteten Gebietes eine Tangente besitzt, wenn wir uns dem Punkte P von der einen oder der anderen Seite nähern, damit das Integral einen Sinn behält. Für unser Problem ist diese Bedingung natürlich erfüllt, ebenso wie die Bedingungen über φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

Für den den Punkt P enthaltenden Teil der Begrenzung werden die beiden Integrale:

$$\int_A^B V(st)\, x(t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dt \quad \text{und} \quad \int_A^B \varphi(t)\, V(st)\, \frac{\partial y}{\partial t}\, dt$$

mit ε Null, da $V(st)$ nur logarithmisch unendlich wird. Das dritte Integral dagegen:

$$\int_A^B \varphi(t) \int_{x_s}^{\varrho(st)} G(\xi)\, d\vartheta(st)$$

erhält einen endlichen Wert. Wird $\varepsilon = 0$, so wird $\varrho(st) = x_s$, $\xi = 1$, $G(\xi) = 1$, $\varphi(t) = \varphi(s)$ und das Integral wird:

$$\varphi(s) \int_A^B d\vartheta(st) = \varphi(s)\, \vartheta(st) \Big|_A^B.$$

Ist der betrachtete Punkt P nicht gerade eine Ecke, so wächst der Winkel $\vartheta(st)$, unter dem die Strecke $s - s'$ vom Punkte t aus gesehen wird, um π, wenn wir vom Punkte A aus an s vorbei nach B gehen. Es ist also

$$\vartheta(st) \Big|_A^B = \pi.$$

Hat das Gebiet G dagegen in P eine Ecke, für die der nach außen liegende Winkel gleich α ist, so ist offenbar die Zunahme von $\vartheta(st)$ auf der Strecke von A bis B gleich α.

Wir erhalten also für einen gewöhnlichen Punkt:

$$\int_A^B \varphi(t)\, dS(st) = \pi \varphi(s)$$

und für eine Ecke:

$$= \alpha \varphi(s).$$

Wir erhalten also schließlich für einen Randpunkt s des Gebietes G, der kein Eckpunkt ist:

$$\varphi(s) = \lim_{\varepsilon = 0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_B^A \varphi(t)\, dS(st) - \frac{1}{2\pi} \int_B^A V(st)\, d\psi(t) \right] + \tfrac{1}{2} \varphi(s).$$

Ziehen wir das $\frac{1}{2}\varphi(s)$ auf die linke Seite und lassen die Integrationsgrenzen A und B weg, indem wir den Übergang zu $\varepsilon = 0$ vollzogen denken, so wird:

$$\text{(VIII)} \qquad \varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int \varphi(t)\, dS(st) - \frac{1}{\pi}\int V(st)\, d\psi(t).$$

Die Integrale der rechten Seite sind hier wieder über den ganzen Rand, aber *„mit Ausschluß des Punktes s“* zu erstrecken.

Ist die Stromfunktion ψ für irgendeine Strömung am Rande eines Gebietes gegeben, (z. B. wenn ein rotationssymmetrisches Gefäß gegeben ist, an dessen Wand die Flüssigkeit entlang strömt, so daß der Schnitt der Wand mit einer Meridianebene eine Stromlinie $\psi = \text{const.}$ ist), so stellt Gleichung (VIII) eine Integralgleichung für das Potential dar. Es ist eine lineare, nicht homogene Integralgleichung zweiter Art, deren Kern die Ableitung der Stromfunktion $S(st)$ für die im dritten Paragraphen besprochene Quellringströmung ist.

Wäre der Rand des Strahles gegeben, so hätten wir diese Integralgleichung zu lösen. Die Schwierigkeit unseres Problems liegt aber gerade darin, daß der Rand des Strahles, d. h. für die Integralgleichung: der Kern nicht gegeben ist. Statt dessen ist auf dem freien Rande für das Potential die Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1$ vorgeschrieben.

Im folgenden Kapitel werden wir zeigen, wie es mit Hilfe dieser zweiten Bedingung gelingt, ein Verfahren sukzessiver Approximation zur Bestimmung des Strahlrandes und der Kontraktionszahl zu finden.

Drittes Kapitel.

Anwendung der Integralgleichung auf das Problem der vena contracta.

§ 1. Der Rechnungsgang bei gegebenem Strahlrande.

Der Fortschritt, den wir mit der Aufstellung der Integralgleichung (VIII) für unser Problem erzielt haben, ist der, daß wir unsere Aufgabe damit auf eine Gleichung zurückgeführt haben, in der nur noch die Werte von φ längs der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der Randpunkte vorkommen, während wir in der Differentialgleichung eine Beziehung zwischen den Werten in der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der Punkte in der xy-Ebene formuliert hatten. $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ sollte ja nach der Randbedingung (IIa) längs des ganzen Randes Null sein, dieses Glied fällt also aus der Integralgleichung noch heraus.

Um unsere Aufgabe mit Benutzung der Integralgleichung (VIII) präzise formulieren zu können, müssen wir uns noch der Konvergenz unserer Integrale versichern, für den Fall, daß sich der Integrationsweg ins Unendliche erstreckt, wie das bei unserem Probleme der Fall ist. Es handelt sich in den Formeln (V) und (VIII) um die Integrale:

$$\int \varphi(t)\, dS(st) = \int \varphi(t) x(t) \frac{\partial V}{\partial n} dt \quad \text{und} \quad \int V(st)\, d\psi(t) = \int V(st) x(t) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dt,$$

die über den Rand des Gebietes zu erstrecken sind.

Da die Formeln (V) und (VIII) zunächst unter der Voraussetzung abgeleitet waren, daß das betrachtete Gebiet im Endlichen läge, so wollen wir dieses Gebiet vorderhand im Strahle durch eine Parallele zur x-Achse und oberhalb der Begrenzungsebene (im Gefäße) durch einen Viertelkreis um den Nullpunkt abschließen. Diese Abgrenzungen lassen wir jetzt ins Unendliche rücken.

Für das Unendliche im Gefäße kommt es auf die Form der Öffnung nicht an; die Strömung erfolgt so, als ob die gesamte Wassermenge im Nullpunkte durch die begrenzende Wand abströmte. Das Potential geht also wie $\frac{1}{r}$ gegen eine Konstante (wo r der Abstand vom Nullpunkte ist). Da das Potential überhaupt nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, so können wir also im Unendlichen $\varphi = 0$ annehmen.

Da $V(st)$ ebenfalls wie $\frac{1}{r}$ gegen Null geht, wenn r unendlich wird, also die Normalableitung $\frac{\partial V(st)}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r^2}$, so folgt, daß die beiden Integrale jedenfalls konvergent bleiben, wenn wir den Viertelkreis ins Unendliche rücken, und daß speziell die über den Viertelkreis selbst zu nehmenden Teile wegfallen.

Man überzeugt sich leicht, daß die Integrale auch noch konvergieren, wenn man auf dem Strahlrande ins Unendliche geht, wo φ wie y unendlich wird. Aus praktischen Gründen wollen wir jedoch in einer Entfernung, in der sich der Strahlrand voraussichtlich von seiner Asymptote nicht mehr merklich unterscheiden wird, den Strahl durch eine horizontale (d. h. der x-Achse parallele) Gerade AB abschließen. Auf dieser Geraden können wir dann $\varphi = \text{const.}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 1$ setzen, da die Strömung sich von einer Parallelströmung nicht mehr merklich unterscheiden wird. Um die Entfernung abzuschätzen, in der wir diese Gerade ziehen müssen, werden wir die Helmholtz-Kirchhoffsche Lösung des ebenen Problems zum Vergleiche heranziehen. (Vgl. Kap. IV über die numerisch-graphische Durchführung).

Bezeichnen wir jetzt das den Strahl abschließende Stück mit AB, den Ansatzpunkt des Strahles mit C, und den unendlich fernen Punkt auf der x-Achse mit D, so können wir unsere Formeln (V) und (VIII) so schreiben:

Für einen inneren Punkt:

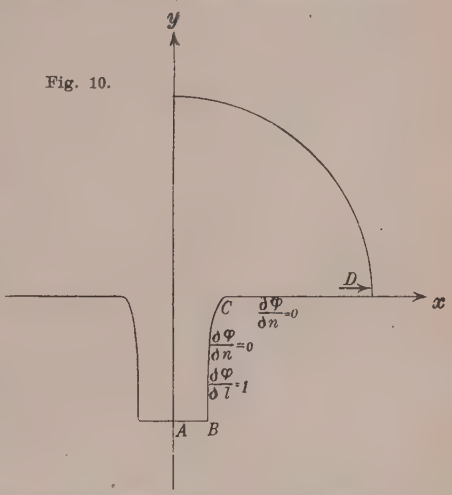
$$\text{(V)} \qquad \varphi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_A^D \varphi(t)\,dS(st) - \frac{1}{2\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt.$$

Für einen Randpunkt:

$$\text{(VIII)} \qquad \varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^D \varphi(t)\,dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt.$$

Das zweite Integral geht dabei bloß von A bis B, weil überall sonst an der Begrenzung $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ ist, und dort ist $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 1$ gesetzt. Das erste Integral geht bloß von A bis D weil die y-Achse und der abschließende Halbkreis im Unendlichen nichts beitragen.

Fig. 10.



Unser Problem, das früher lautete: Die Differentialgleichung $\operatorname{div}(x.\ \operatorname{grad}\varphi) = 0$ zu integrieren, und den Rand so zu bestimmen, daß längs der gesamten Begrenzung $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ und längs des Strahlrandes $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 1$ sein sollte, lautet jetzt:

Es ist die Integralgleichung (VIII) *aufzulösen, und es ist der Strahlrand so zu bestimmen, daß auf ihm* $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 1$ *wird.*

Die erste Randbedingung, daß längs der festen Wand und des Strahlrandes $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ sein sollte, und zwischen A und B $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 1$, ist dabei bereits in der Integralgleichung benutzt worden. Daß auch wirklich die Funktion, die wir nach Auflösung der Integralgleichung (VIII) im Innern des von der Flüssigkeit erfüllten Gebietes aus Formel (V) durch Integration erhalten, die Randbedingung für $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ erfüllt, folgt in einfacher Weise aus den Eindeutigkeitssätzen der Potentialtheorie.

Es läge nun nahe, zur Lösung unseres Problems den folgenden Weg zu gehen. Da wir zunächst den Strahlrand nicht kennen, für den wir die Integralgleichung lösen sollen und längs dessen dann $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1$ sein soll, so verzichten wir zunächst auf diese letzte Bedingung $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1\right)$ und wählen willkürlich einen Strahlrand. Dann können wir die Integralgleichung lösen und erhalten dadurch die Strömung, die längs des angenommenen Randes entlang fließen würde, wenn derselbe eine feste Wand wäre. Jetzt prüfen wir, ob vielleicht längs des angenommenen Randes $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1$ ist. Sollte dies zufällig eintreten, so hätten wir bereits eine Lösung für unser Problem gefunden. Im allgemeinen wird das aber nicht der Fall sein. Man könnte dann jedoch aus der Abweichung von $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ gegen den Wert 1 ersehen, wie man den zunächst willkürlich angenommenen Rand zu verbessern hätte.

Das eben beschriebene Verfahren wäre natürlich ziemlich mühsam, denn es würde für jede Randform die Auflösung der Integralgleichung (VIII) erfordern.

In unserem Falle können wir uns nun die Auflösung der Integralgleichung (VIII) sparen und damit unser Verfahren wesentlich vereinfachen. Es zeigt sich nämlich, daß wir, falls der richtige Rand gegeben wäre, die Integralgleichung (VIII) ohne weiteres auflösen könnten. Demgemäß verfahren wir folgendermaßen: Wir nehmen einen Rand so an, wie die Strahlform ungefähr zu erwarten ist. Dann wenden wir das Verfahren an, das für die richtige Strahlform das richtige Potential liefern würde. Erhalten wir eine Funktion, die die Integralgleichung (VIII) befriedigt, und für die auf dem Strahlrande $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1$ ist, so ist das Problem gelöst. Wie wir anderenfalls die angenommene Strahlform verbessern, werde ich im nächsten Paragraphen auseinandersetzen. Zunächst will ich zeigen, wie wir bei gegebenem richtigen Strahlrande die Lösung der Integralgleichung (VIII) finden. Zu dem Zwecke machen wir folgende Bemerkung. Unsere Potentialfunktion ist vollständig gegeben, wenn wir auf dem ganzen Rande φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ kennen; sie wird dann durch Formel (V) dargestellt. $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ist nun von vornherein bekannt: es ist null an der festen Wand und am Strahlrand, und 1 über das Abschlußstück AB. Da wir jetzt voraussetzen, daß der richtige Rand gegeben ist, so ist bis auf eine additive Konstante auf dem Strahlrand auch das Potential bekannt, denn dort ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1 \quad \text{also:} \quad \varphi(s) = l(s) + \varphi(C),$$

wo $l(s)$ die Bogenlänge längs des Strahlrandes zwischen dem Punkte s und dem Ansatzpunkte C des Strahles und $\varphi(C)$ der Wert des Potentials im Punkte C ist.

Es bleibt uns also nur noch übrig, das Potential an der festen Wand zu bestimmen, und das leistet gerade Gleichung (VIII). Es lassen sich nämlich in

$$\text{(VIII)} \qquad \varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^D \varphi(t)\, dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)\, x(t)\, dt$$

die beiden Integrale auswerten, wenn s ein Punkt der festen Wand ist; es ist nämlich für eine Strömung, die ihre Singularität (Quelle) auf der x-Achse hat, aus Symmetriegründen die x-Achse eine Stromlinie $S = \pi$. Demgemäß ist für solche Punkte t, die auch auf der x-Achse liegen, $dS(st) = 0$. Es fällt also der über die x-Achse zu erstreckende Teil, längs dessen φ noch unbekannt war, aus dem Integral heraus, und es bleibt bloß der Teil von A bis C stehen, längs dessen φ bekannt ist. Schließlich bemerken wir, daß auch die einstweilen noch unbekannte Konstante $\varphi(C)$ aus dem Integral herausfällt, wenn wir in dem Integral für $\varphi(t)$ seinen Wert $\varphi(t) = \varphi(C) + l(t)$ längs des Strahlrandes einsetzen, welche Formel auch noch für das Stück von A bis B gilt, wenn wir dort $l(t) = l(B)$ setzen. Es ist nämlich:

$$\int_A^C \varphi(C)\, dS(st) = \varphi(C)\,(S(sC) - S(sA)).$$

Nun haben wir früher gesehen, daß für einen Punkt s auf der x-Achse die Stromlinie $S(st) = 0$ nach links bis zur y-Achse geht, sich dort teilt und nach unten längs der y-Achse weiter geht. Es liegen also sowohl der Punkt C als der Punkt A auf der Stromlinie $S(st) = 0$, wenn s auf der x-Achse liegt. Daraus folgt: $S(sC) = S(sA) = 0$, also:

$$\int_A^C \varphi(C)\, dS(st) = 0,$$

wie zu beweisen war.

Es folgt also für das Potential am festen Rande bei gegebener Strahlform die Formel

$$\text{(IX)} \qquad \varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^C l(t)\, dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)\, x(t)\, dt.$$

Dabei ist also $l(t)$ längs des Strahlrandes gleich der Bogenlänge, gemessen von C aus, und zwischen A und B gleich $l(B)$.

§ 2. Bestimmung des Strahlrandes und der Kontraktionszahl durch sukzessive Approximation.

Die letzte Formel ermöglicht uns die Bestimmung des Strömungspotentials bei gegebenem Rande. Da uns in Wirklichkeit die Form des Strahles nicht bekannt ist, so verfahren wir in der oben bereits angedeuteten Weise: Wir nehmen einen Strahlrand zunächst in plausibler Weise an, und bilden für den festen Rand die Integrale, die bei gegebener wirklicher Strahlform das Potential liefern würden. Dadurch erhalten wir am festen Rande eine Funktion, die wir mit $\varphi_1(s)$ bezeichnen wollen

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^C l(t)\,dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt.$$

Ebenfalls mit $\varphi_1(s)$ wollen wir *auf dem Strahlrande* die Funktion $\varphi_1(s) = \varphi_1(C) + l(s)$ bezeichnen. Für die Punkte des festen Randes erfüllt dann die Funktion $\varphi_1(s)$ die Integralgleichung (VIII).

Nun bilden wir für den angenommenen Strahlrand die Funktion

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^D \varphi_1(t)\,dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt.$$

Wenn diese Funktion $\varphi_2(s)$ gleich $\varphi_1(s)$ würde, so erfüllte $\varphi_1(s)$ offenbar auch auf dem Strahlrande die Integralgleichung, und da nach Definition auf dem Strahlrande $\frac{\partial \varphi_1}{\partial l} = 1$ ist, so wäre unser Problem gelöst.

Im allgemeinen wird aber eine Differenz zwischen $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$ stehen bleiben. Etwas sicheres läßt sich über diesen Fehler nicht aussagen, doch führt folgende Betrachtung zu einer ungefähren Orientierung über den Sinn, in dem wir bei Vorhandensein eines solchen Fehlers die Strahlform verbessern können.

Nehmen wir an, wir wollten diejenige Strömung finden, für die die angenommene Strahlform Stromlinie ist, indem wir die Bedingung fallen lassen, daß auf dem freien Rande $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1$ sein soll. Dann können wir zur Lösung dieser Aufgabe die Integralgleichung (VIII) benutzen. Die Berechnung der Funktionen $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$ ist dann gleichbedeutend mit einem ersten Schritte zur Auflösung von (VIII) durch sukzessive Approximation. Ist nun für die Lösung der Integralgleichung (VIII), die wir mit $\bar{\varphi}$ bezeichnen wollen, am Rande des angenommenen Strahles in der Nähe der Öffnung $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial l}$ kleiner als 1, so

müßten wir, um bei festgehaltener Asymptote (d. h. bei gleicher pro Zeiteinheit abfließender Wassermenge) die Geschwindigkeit am Rande zu erhöhen, den Rand etwas nach innen schieben. Wir müßten die Öffnung etwas verkleinern, d. h. den Kontraktionskoeffizienten etwas vergrößern. Umgekehrt müßten wir den Kontraktionskoeffizienten verkleinern, wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ in der Nähe der Öffnung größer als 1 ist.

Setzen wir statt der unbekannten Lösung die zweite Näherung $\varphi_2(s)$ ein, so werden wir also erwarten dürfen, daß wir unseren Strahlrand durch *Vergrößerung* des Kontraktionskoeffizienten verbessern, *wenn* $\varphi_2(s)$ *kleiner ist als* $\varphi_1(s)$, durch *Verkleinerung* dagegen, *wenn* $\varphi_2(s)$ *größer ist als* $\varphi_1(s)$.

Der Gang der Rechnung zur Lösung des Problems wird also der folgende sein. Man nimmt eine Strahlform an. Dann bestimmt man für den festen Rand die Funktion

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{\pi_e}\int_A^C l(t)\,dS(st) - \frac{1}{\pi_e}\int_A^B V(st)x(t)\,dt$$

und bildet für den Strahlrand $\varphi_1(s) = l(s) + \varphi_1(C)$, wo $\varphi_1(C)$ aus der ersten Integration gewonnen wird.

Danach bestimmt man für den Strahlrand:

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{\pi_e}\int_A^D \varphi_1(t)\,dS(st) - \frac{1}{\pi_e}\int_A^B V(st)x(t)\,dt$$

und korrigiert aus dem Vergleich von $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$ auf dem Strahlrande nach den oben gegebenen Gesichtspunkten die angenommene Strahlform.

Mit der neuen Strahlform verfährt man in der gleichen Weise, und so fort, bis die Unterschiede von φ_1 und φ_2 unterhalb der Grenze liegen, die durch die Genauigkeit der mit dem Planimeter auszuführenden Integrationen bedingt ist.

Ich habe auf diese Weise bei einer Öffnung mit dem Radius 1 für einen Strahlrand mit der Asymptote $x = 0{,}75$ die Differenz $\varphi_2(s) - \varphi_1(s)$ überall negativ, bei einem Strahlrande mit der Asymptote $x = 0{,}80$ die Differenz überall positiv gefunden. Danach habe ich noch einen Strahl mit der Asymptote $x = 0{,}78$ angenommen, und für diesen lagen dann wirklich die Fehler unterhalb der Genauigkeitsgrenze der Planimetrierungen. Hiernach wäre der Kontraktionskoeffizient

$$\alpha = 0{,}78^2 = 0{,}61.$$

Aus der Größe der Fehler für die Strahlen mit den Asymptoten $x = 0{,}75$ und $x = 0{,}80$ kann man noch die Genauigkeit dieses Wertes abschätzen. Man erhält:

$$0{,}60 \leqq \alpha \leqq 0{,}62.$$

Für die Einzelheiten der Rechnung verweise ich auf das letzte Kapitel.

§ 3. Konstruktion des vollständigen Strömungsbildes.[1])

Es bleibt noch übrig, zu dem durch sukzessive Approximation gefundenen Strahlrand das vollständige Strömungsbild zu finden. (Vgl. zu diesem Paragraphen Nr. V der *Zeichnungen.*) Wir haben also die Aufgabe:

Es sind Potential und Stromfunktion in dem Innern des von der Flüssigkeit erfüllten Gebietes zu bestimmen. Gegeben sind der Rand, der Stromlinie ist, und längs des Randes das Potential.

Man könnte natürlich mit Hilfe der Formel (III) das Potential für eine Anzahl von Punkten im Innern ermitteln, und dann durch Interpolation die Kurven $\varphi = \text{const.}$ und $\psi = \text{const.}$ finden. Dieses Verfahren wäre aber zu mühsam. Wir wollen deshalb ein approximatives Verfahren anwenden, das sich auf gewisse infinitesimalgeometrische Eigenschaften des Netzes der Kurven $\varphi = \text{const.}$ und $\psi = \text{const.}$ stützt. Dazu benützen wir folgenden Satz:

Zeichnet man sich die Stromlinien $\psi = \text{const.}$ und die Linien gleichen Potentials $\varphi = \text{const.}$, für eine in Meridianebenen verlaufende Potentialströmung, so bilden die vier Kurven:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta_1; \qquad \varphi = \varphi_0 - \Delta_1; \qquad \psi = \psi_0 + \Delta_2; \qquad \psi = \psi_0 - \Delta_2$$

ein kleines Rechteck, in dem die Diagonalen bis auf Glieder dritter Ordnung gleich lang sind, und in dem die Tangente des halben zwischen den Diagonalen liegenden Winkels gleich $\frac{1}{x}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ ist (wobei der in Richtung der Kurven $\psi = \text{const.}$ liegende Winkel genommen ist). Bezeichnen wir die Diagonalen mit p_1 und p_2 und den Winkel mit α (siehe Figur), so ist also: $p_1 = p_2$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$.

Die erste Eigenschaft, daß in den kleinen Rechtecken die Diagonalen gleich lang sind, ist für alle orthogonalen Kurvenscharen erfüllt. Die zweite Bedingung für den Winkel zwischen den Diagonalen ist

1) Zu den Entwickelungen in diesem Paragraphen vergleiche: C. Runge, Graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung: $\Delta u = 0$. — Göttinger Nachrichten. 1911.

dagegen für die Differentialgleichung der axialsymmetrischen Potentialströmung charakteristisch.

Zum Beweise unseres Satzes drücken wir die partiellen Differentialquotienten von x und y nach φ und ψ aus. Es ist:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = +\frac{1}{D}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{1}{D}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{D}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \psi} = +\frac{1}{D}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

wo $$D = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$ ist.

Aus diesem Gleichungssystem folgt in Verbindung mit den Gleichungen für die Stromfunktion:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -x\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = x\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = x\frac{\partial y}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -x\frac{\partial x}{\partial \psi}$$

und hieraus insbesondere:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Gleichung stets gilt, wenn die Kurven $\varphi = \text{const.}$ und die Kurven $\psi = \text{const.}$ sich orthogonal schneiden, denn dann ist stets

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

woraus die Gleichung folgt.

Gehen wir nun von dem Punkte aus, wo $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ ist, und bezeichnen wir die Koordinaten der Eckpunkte, in denen

$$\begin{aligned}
&\varphi = \varphi_0 + \Delta_1; \quad \psi = \psi_0 + \Delta_2 \text{ ist, mit } \xi_1, \eta_1\\
&\varphi = \varphi_0 + \Delta_1; \quad \psi = \psi_0 - \Delta_2 \qquad\quad \xi_2, \eta_2\\
&\varphi = \varphi_0 - \Delta_1; \quad \psi = \psi_0 + \Delta_2 \qquad\quad \xi_3, \eta_3\\
&\varphi = \varphi_0 - \Delta_1; \quad \psi = \psi_0 - \Delta_2 \qquad\quad \xi_4, \eta_4
\end{aligned}$$

so ist:

$$p_1^2 = (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2$$
$$p_2^2 = (\xi_2 - \xi_4)^2 + (\eta_2 - \eta_4)^2.$$

Bis auf Größen, die in den Δ mindestens von vierter Ordnung sind, ist das

$$p_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}2\Delta_1 + \frac{\partial x}{\partial \psi}2\Delta_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}2\Delta_1 + \frac{\partial y}{\partial \psi}2\Delta_2\right)^2.$$

Setzen wir $\Delta_2 = \varkappa \Delta_1$ so wird:

$$p_1 = 2\Delta_1 \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \varkappa^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \varkappa^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + 2\varkappa \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)}.$$

Hier heben sich nach der oben entwickelten Formel unter der Wurzel die doppelten Produkte fort, und es bleibt:

$$p_1 = 2\Delta_1 \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \varkappa^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \varkappa^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2} + \text{Glieder vierter Ordnung.}$$

Ebenso erhalten wir:

$$p_2 = 2\Delta_1 \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \varkappa^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \varkappa^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2} + \text{Glieder vierter Ordnung.}$$

Entwickelt man die Wurzeln, so sieht man, daß in der Tat p_1 und p_2 bis auf Größen, die in den Δ dritter Ordnung sind, übereinstimmen.

Für den Winkel zwischen den beiden Diagonalen in Richtung der Kurven $\psi = \text{const.}$ folgt:

$$\cos\alpha = \frac{(\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4) + (\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_4)}{p_1 p_2}.$$

Entwickeln wir Zähler und Nenner, indem wir Größen dritter Ordnung fortlassen, so wird:

$$\cos\alpha = \frac{4\Delta_1^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \varkappa\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \varkappa\frac{\partial x}{\partial \psi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \varkappa\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \varkappa\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)\right]}{4\Delta_1^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \varkappa^2\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \varkappa^2\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \varkappa^2\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2\right) + \text{Größen in } \Delta^2}{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right) + \varkappa^2\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2\right) + \text{Größen in } \Delta^2},$$

und dieses ist nach den Formeln:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = x\frac{\partial y}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -x\frac{\partial x}{\partial \psi}; \qquad \cos\alpha = \frac{x^2 - \varkappa^2}{x^2 + \varkappa^2} + \text{Größen in } \Delta^2.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varkappa}{x} = \frac{1}{x}\frac{\Delta_2}{\Delta_1} + \text{Größen in } \Delta^2.$$

Auch der Fehler von $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und damit von α wird in den Δ von zweiter Ordnung klein.

Sind nun drei Ecken eines solchen kleinen Rechtecks bekannt, so können wir die vierte finden, da die Länge der Diagonale 2—4 gleich der Länge der gegebenen Diagonale 3—5 ist und der Winkel α durch

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ gegeben ist. Der Fehler der Koordinaten des so konstruierten Punktes 4 ist dann dritter Ordnung in Δ_1 und Δ_2, denn in Richtung von 2—4 ist er nach unserer Rechnung dritter Ordnung klein, und in Richtung senkrecht dazu ist er von der Größe $p\delta\alpha$ wo $\delta\alpha$ der Fehler von α ist, der zweiter Ordnung in den Δ ist, so daß die gesamte Verschiebung auch in dieser Richtung von dritter Ordnung klein wird. Zur Berechnung von $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ genügt es, für x den Wert zu nehmen, der dem Mittelpunkte der gegebenen Diagonale entspricht.

Von den angegebenen infinitesimalgeometrischen Eigenschaften machen wir nun für unser Problem Gebrauch. Gegeben sind uns zwei Stromlinien: erstens die y-Achse und dann die Stromlinie, die durch die feste Wand und den anschließenden Strahlrand gebildet wird. Längs dieser letzteren ist uns auch das Potential bekannt. Wir können uns also an der festen Wand und am Rande des Strahles die Punkte markieren, in denen sich die φ-Werte je um konstante Differenzen unterscheiden. Geht man nun von dieser Stromlinie mit der darauf gezeichneten Skala der φ-Werte aus, so kann man systematisch weiterkonstruieren, in derselben Weise, wie es von Runge für den ebenen Fall bei Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung angegeben ist. (Vgl. hierzu: Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1911. C. Runge, Graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$). Bequemer jedoch, und für den vorliegenden Fall ausreichend ist es, von der Skala ausgehend, sich zunächst ungefähr die Linien $\varphi = \text{const.}$, die auf den Rand und auf die y-Achse senkrecht münden müssen, und eine Anzahl Stromlinien möglichst senkrecht dazu einzuzeichnen. Diesen ersten Entwurf korrigiert man dann zunächst so, daß die Bedingung der Orthogonalität erfüllt ist, d. h. daß die Diagonalen in den kleinen Rechtecken gleich lang sind. Da man die Asymptoten der Stromlinien sowohl unten im Strahle als oben im Gefäße kennt, erhält man auf diese Weise schon ein ziemlich gutes Netz, das man dann mit Hilfe der letzten Bedingung $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x}\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ nur noch wenig zu korrigieren braucht.

Diese Methode ist unbrauchbar nur in der nächsten Nähe des Ansatzpunktes des Strahles, da dort eine singuläre Stelle für die Funktion φ ist. Da aber die Endpunkte der Kurven $\varphi = \text{const.}$ auf dem Rande gegeben sind, so kann man diese Kurven auch in der Nähe des Ansatzpunktes noch ganz gut bestimmen und erhält die dem Rande benachbarten Stromlinien, indem man die Kurven $\varphi = \text{const.}$ möglichst orthogonal schneidet.

Es bleibt noch zu zeigen, daß unsere Konstruktion auch in der Nähe der y-Achse, wo $\frac{\partial x}{\partial \psi}$ unendlich wird, ihre Gültigkeit behält. Dazu bemerken wir, daß wir für unsere infinitesimalgeometrischen Betrachtungen lediglich die Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi} = 0$$

benutzt hatten. Dieses ist nun aber immer erfüllt, wenn die Linien $\varphi = \text{const.}$ und die Linien $\psi = \text{const.}$ orthogonal sind. Es gilt also die Gleichheit der Diagonalen für alle orthogonalen Kurvenscharen. Betrachten wir also statt ψ die Funktion $\sqrt{\psi}$, für die natürlich auch die Kurven $\varphi = \text{const.}$ auf den Kurven $\sqrt{\psi} = \text{const.}$ senkrecht stehen, so gelten unsere Betrachtungen auch, und $\frac{\partial x}{\partial \sqrt{\psi}}$ ist nicht mehr unendlich. Unsere Konstruktion bleibt dann unverändert bestehen.

Viertes Kapitel.

Numerisch-graphische Durchführung.

§ 1. Eine Vereinfachung der Formeln.

Ich gehe jetzt dazu über, die Resultate, die ich bei der zahlenmäßigen Durchführung der oben entwickelten Methode erhalten habe, darzustellen.

Zunächst will ich aber noch eine Vereinfachung in den Formeln vornehmen, die sich für die graphischen Integrationen als praktisch erweist. — Es handelte sich darum, bei einem angenommenen Strahle zuerst für die Punkte der festen Wand die Integrale:

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^C l(t)\,dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt$$

auszuwerten, und dann für den Strahlrand die Integrale:

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^D \varphi_1(t)\,dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt$$

zu bilden. Dabei war $l(t)$ zwischen C und B gleich der Bogenlänge am Strahlrande, gemessen von C aus, und gleich $l(B)$ zwischen A und B. $\varphi_1(s)$ ist auf dem festen Rande durch die erste Gleichung gegeben und für den Strahl $\varphi_1(s) = l(s) + \varphi_1(C)$.

Nun wird für φ_2 in dem ersten Integral der Integrand unendlich, was für die graphische Integration unpraktisch ist. Ich schreibe deshalb die zweite Formel:

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^D (\varphi_1(t) - \varphi_1(s))\,dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_A^D \varphi_1(s)\,dS(st).$$

Hier bleibt der Integrand des ersten Integrals endlich, und das hinzutretende Integral $\varphi_1(s)\int_A^D dS(st)$ wird Null, wie sich leicht zeigen läßt. Es ist nämlich:

$$\int_A^D dS(st) = \int_A^s dS(st) + \int_s^D dS(st),$$

wobei die früher gegebene Integrationsvorschrift zu beachten ist, daß bei der Integration über den Rand der Punkt s selbst aus dem Integrationswege ausgeschlossen ist. Es sind bei der Integration also die Grenzwerte der Integrale bei Annäherung an den Punkt s von beiden Seiten zu nehmen. Nun ist im Punkte A der y-Achse $S(sA) = 0$, im unendlich fernen Punkte D der x-Achse $S(sD) = \pi$. Integrieren wir nun längs der Begrenzung von A bis s, so nähert sich $S(st)$ einem Grenzwerte, den wir mit $S(ss_1)$ bezeichnen wollen. Gehen wir über den Punkt s hinweg, so springt $S(st)$ um den Wert π, hat also den Wert $S(ss_2) = S(ss_1) + \pi$ und daraus folgt:

$$\int_A^s dS(st) = S(ss_1); \int_s^D dS(st) = -S(ss_2) + \pi = -S(ss_1), \text{ also } \int_A^D dS(st) = 0,$$

wie zu beweisen war.

Wir erhalten also die Formeln:

für den festen Rand:

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^C l(t)\,dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt,$$

für den Strahlrand:

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{\pi}\int_A^D (\varphi_1(t) - \varphi_1(s))\,dS(st) - \frac{1}{\pi}\int_A^B V(st)x(t)\,dt.$$

Hier ist: (Vgl. Kap. II, § 3.)

$$dS(st) = \frac{E(\xi)}{\varrho(st)}\,dy(t) + \frac{\varrho(st)}{x_s}\,G(\xi)\,d\vartheta(st).$$

Nun hat die Funktion $\vartheta(st)$ (d. h. der Winkel, unter dem der Punkt s und sein Spiegelbild s' von t aus gesehen werden), für $s = t$ dieselbe Unstetigkeit wie $S(st)$, d. h. sie springt um den Wert π, wenn man über s hinweg geht. Um diese Unstetigkeit zu beseitigen, führen wir an Stelle von $\vartheta(st)$ die Funktion $\vartheta^*(st)$ ein, indem wir festsetzen, daß für $t < s$, d. h. wenn t zwischen A und s liegt: $\vartheta^*(st) = \vartheta(st) - \pi$ sein soll, dagegen für $t \geqq s$, d. h., wenn t zwischen s und D liegt, $\vartheta^*(st) = \vartheta(st)$ sein soll. Es ist dann $d\vartheta^*(st) = d\vartheta(st)$, sodaß alle Formeln die gleichen bleiben, nur tritt überall $d\vartheta^*(st)$ an Stelle von $d\vartheta(st)$, und $\vartheta^*(st)$ ist jetzt überall stetig.

§ 2. Die Strahlformen und die Integrationen.

Die erste Strahlform, auf die ich die im letzten Kapitel dargelegte Methode angewendet habe, war einfach die Figur, die man beim ebenen Probleme erhält. Da für diese Form der Abstand der Strahlasymptote von der Symmetrieebene (also in unserer Schnittfigur der Abstand von der y-Achse) gleich 0,611 ist, so würde man den Kontraktionskoeffizienten $0{,}611^2 = 0{,}37$ erhalten, wenn diejenige Strahlform die richtige wäre, die man durch Rotation dieser Schnittfigur um die y-Achse erhält. Nun haben wir aber im ersten Kapitel gesehen, daß die Kontraktionszahl stets größer als 0,5 sein muß. Unsere erste Annahme ist also sicher falsch; doch erschien es mir nützlich, auch für eine sicher falsche Strahlform die Rechnung durchzuführen, um die Empfindlichkeit der Methode festzustellen, d. h. um zu sehen, ob die Differenzen von φ_1 und φ_2 groß genug würden, um eine falsche Strahlform mit Sicherheit als falsch erkennen zu lassen. Es ergaben sich tatsächlich sehr große Fehler, die ich unten noch angeben werde.

Da die Experimente einen Kontraktionskoeffizienten ungefähr gleich 0,6 ergeben, so habe ich für die zweite und dritte Näherung beim Öffnungsradius 1 die Asymptoten des Strahles in die Entfernung 0,75 und 0,80 von der y-Achse gelegt. Das entspricht den Kontraktionszahlen 0,56 und 0,64. Die Strahlform selbst habe ich durch affine Veränderung der Strahlform des ebenen Problemes erhalten, indem ich bei gleichen y-Werten die Abstände von der Geraden $x = 1$ alle im gleichen, durch die Lage der Asymptoten gegebenen Verhältnis verkürzte.

Die abschließende Gerade AB habe ich in der Entfernung 2,5 von der Öffnung angenommen; für das ebene Problem unterscheiden sich in dieser Entfernung die Abszissen des Strahlrandes und seiner Asymptote nur um $\frac{1}{1000}$. (Vgl. Lamb, pag. 93 Formel 10.) Im Bereich der erreichbaren Genauigkeit genügt es deshalb, in dieser Entfernung die Strömung als reine Parallelströmung anzusehen.

In der folgenden kleinen Tabelle sind für die Strahlformen der zweiten und dritten Näherung die Koordinaten der Punkte angegeben, für die ich die Integrale ausgewertet habe.

1. Auf dem festen Rande in beiden Fällen:

Nr.	y	x
0	0	1,0
I	0	1,2
II	0	1,5
III	0	2,0
IV	0	3,0

2. Auf dem angenommenen Strahlrande.

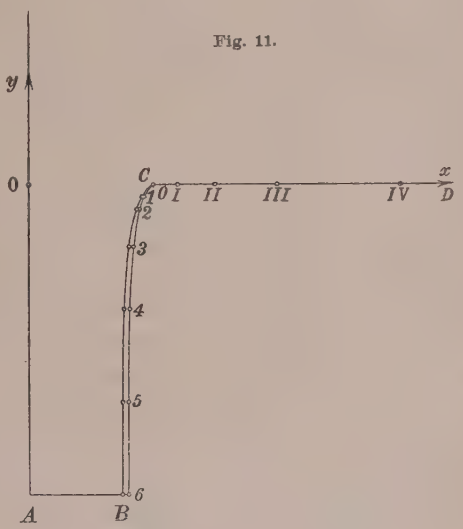
Zweite Näherung:

Nr.	$-y$	x	l
1	0,1	0,9076	0,1396
2	0,2	0,8662	0,2479
3	0,5	0,8014	0,5552
4	1,0	0,7634	1,0565
(5)	1,75	0,7521	1,8069
6	2,50	0,7503	2,5569

Dritte Näherung:

Nr.	$-y$	x	l
1	0,1	0,9261	0,1274
2	0,2	0,8930	0,2328
3	0,5	0,8411	0,5375
4	1,0	0,8107	1,0386
(5)	1,75	0,8017	1,7886
6	2,50	0,8002	2,5386

Fig. 11.



Die zweite und dritte Strahlform.

Die Punkte an der festen Wand sind für alle Näherungen dieselben, sie sind stets durch römische Ziffern bezeichnet. Für die Punkte der Strahlränder sind die Ordinaten stets die gleichen; sie sind durch arabische Ziffern bezeichnet. Der Punkt 0 ist, wie man sieht, der früher mit C bezeichnete Ansatzpunkt des Strahles; der Punkt 6 ist mit dem Endpunkte B der abschließenden Horizontalen identisch. —

Es ist zu bemerken, daß die Integrale für den Punkt 5 nicht ausgewertet wurden, weil die Reihenentwicklungen dort schlecht konver-

gieren und auch die graphischen Integrationen zweifelhafte Resultate liefern würden.

Die Auswertung der Integrale.

Für alle Integrationen habe ich *die* Teile, die über die abschließende Gerade zu nehmen sind, durch Reihenentwicklung von $V(st)$ und $\frac{\partial V(st)}{\partial n}$ numerisch ermittelt. Zur Ermittelung von $\varphi_1(s)$ für die Punkte des festen Randes habe ich die über den Strahlrand zu nehmenden Integrale graphisch ausgewertet. Zur Ermittelung von $\varphi_2(s)$ längs des Strahlrandes habe ich *die* Teile der Integrale, die über den Strahlrand und die feste Wand zu nehmen sind, bis zum Punkte IV graphisch ausgewertet. Rechts vom Punkte IV habe ich auch diese Integrale, durch Reihenentwicklungen, auf die ich gleich zurückkommen werde, gewonnen.

Ich bezeichne nun die einzelnen Teile der Integrale folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} T(s) &= -\int_A^B V(st)x(t)\,dt \\ U(s) &= +\int_A^B \frac{\partial V(st)}{\partial n}x(t)\,d\vartheta^*(st) \end{aligned}\right\} \text{Hierbei ist: } \begin{aligned} dt &= \quad dx(t) \\ dn &= -\,dy(t) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \Theta(s) &= \frac{1}{x_s}\int_B^C l(t)G(\xi)\varrho(st)\,d\vartheta^*(st), \end{aligned}\right\} \text{wenn } s \text{ ein Punkt des festen Randes ist,}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{x_s}\int_B^{IV}(\varphi_1(t)-\varphi_1(s))\,G(\xi)\varrho(st)\,d\vartheta^*(st), \end{aligned}\right\} \text{wenn } s \text{ ein Punkt des Strahlrandes ist,}$$

$$Y(s) = \int_B^C l(t)\frac{E(\xi)}{\varrho(st)}\,dy(t), \quad \text{wenn } s \text{ ein Punkt des festen Randes ist,}$$

$$= \int_B^C (\varphi_1(t)-\varphi_1(s))\frac{E(\xi)}{\varrho(st)}\,dy(t), \quad \text{wenn } s \text{ ein Punkt des Strahlrandes ist.}$$

Schließlich:

$$R(s) = \int_{IV}^{\infty}(\varphi_1(t)-\varphi_1(s))\,dS(st) = \int_{IV}^{\infty}(\varphi_1(t)-\varphi_1(s))x(t)\frac{\partial V(st)}{\partial n}\,dt.$$

Das letzte Integral kommt nur für die Punkte auf dem Strahlrande in Betracht.

Dann ist nach den Formeln des letzten Paragraphen:

Für einen Punkt des festen Randes:

$$\pi\varphi_1(s) = T(s) + Y(s) + \Theta(s) + l(6)\,U(s)$$

und für einen Punkt des Strahlrandes:

$$\pi\varphi_2(s) = T(s) + Y(s) + \Theta(s) + (\varphi(6) - \varphi(s))\,U(s) + R(s).$$

Davon werden Y und Θ graphisch, die übrigen numerisch ausgewertet.

Die Rechnungen und Zeichnungen für die letzte Näherung sind am Schlusse dieser Arbeit vollständig wiedergegeben. Und zwar enthalten Nr. I bis IV der Zeichnungen die zur Ermittelung von $Y(s)$ und $\Theta(s)$ zu planimetrierenden Kurven. Diese Kurven, nämlich:

$$\frac{l(t)\,E(\xi)}{\varrho(st)} \quad \text{und} \quad (\varphi_1(t) - \varphi_1(s))\frac{E(\xi)}{\varrho(st)}$$

aufgetragen als Funktion von $y(t)$ und

$$\frac{1}{x_s} \cdot l(t)\varrho(st)G(\xi) \quad \text{und} \quad (\varphi_1(t) - \varphi_1(s))\varrho(st)G(\xi)$$

als Funktion von $\vartheta^*(st)$, sind mit Hilfe der Tabellen 2 und 3 gezeichnet. Auf Tabelle 2 sind angegeben die Werte von:

$$\varrho(st) = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_s - x_t)^2 + (y_s - y_t)^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_s + x_t)^2 + (y_s + y_t)^2}$$

und

$$\alpha = \arcsin\xi, \quad \left(\xi = \frac{x_s x_t}{\varrho^2(st)}\right)$$

für alle Punktepaare $x_s y_s$ und $x_t y_t$, dazu noch die Werte der beiden elliptischen Funktionen $E(\xi)$ und $G(\xi)$, die als Funktion von α jedesmal aus der Tabelle 1 entnommen sind. Die Tabelle 3 gibt dann die Werte der zu integrierenden Funktionen für jeden der zehn Punkte s als Funktion von $y(t)$ und $\vartheta^*(st)$. Die Punkte t, für die hier bei gegebenem s diese Werte gerechnet sind, sind der Reihe nach die Punkte von IV bis 0 an der festen Wand, und von 0 bis 6, einschließlich 5, auf dem Strahle. Auf Tabelle IV sind dann die Resultate der Integrationen und Rechnungen zusammengestellt.

Bei der *Integration durch Reihenentwicklungen* handelt es sich immer darum, die Funktion $V(st)$ oder $\frac{\partial V}{\partial n}$ in der Nähe der y-Achse nach Potenzen von x_s oder x_t zu entwickeln; wollen wir z. B. nach Potenzen von x_t entwickeln, so haben wir für $x_t = 0$

$$V(st) = V_0(st) = -\frac{\pi}{\varrho_0(st)},$$

wo $\varrho_0(st)$ die Entfernung des Punktes s vom Punkte $x_t = 0$, $y = y_t$ bezeichnet. Da dies für alle Werte von y_t gilt, so kennen wir also

alle Differentialquotienten von $V(st)$ nach y_t, und aus diesen können wir für $x_t = 0$ leicht die Differentialquotienten nach x_t ermitteln. Aus der Differentialgleichung erhalten wir nämlich, wenn x_t gegen Null geht:

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_t} = 0$$

für alle y also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_t \partial y_t} = 0.$$

Ferner

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_t^2} + \frac{1}{x_t}\frac{\partial V}{\partial x_t} = 0,$$

und da

$$\lim_{x_t = 0} \frac{1}{x_t}\frac{\partial V}{\partial x_t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_t^2}$$

ist, für $x_t = 0$

$$\frac{\partial^2 V(st)}{\partial x_t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y_t^2}.$$

Differentiieren wir die Differentialgleichung, so erhalten wir in der gleichen Weise auch die folgenden Differentialquotienten nach x_t. Für die vorliegenden Zwecke genügt es jedoch, wenn wir bis zur zweiten Ordnung gehen. Wir erhalten so:

$$V(st) = \frac{-\pi}{\varrho_0(st)} + \frac{\pi}{2}\frac{3(y_s - y_t)^2 - \varrho_0^2(st)}{\varrho_0^5}\frac{x^2(t)}{2} \cdots$$

und durch Integration:

$$T(s) = -\int_A^B V(st)x(t)dt = \frac{\pi}{\varrho_0(sA)}\frac{b^2}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3(y_s - y_t)^2 - \varrho^2(sA)}{\varrho_0^5(sA)}\cdot\frac{b^4}{8},$$

wo wir die Entfernung der Strahlasymptote von der y-Achse, die in genügender Näherung gleich $x(6)$ ist, mit b bezeichnen. Für den Punkt 6 folgt durch direkte Integration:

$$T(6) = 2b.$$

Für das Integral

$$U(s) = \int_A^B dS(st) = \int_A^B x(t)\frac{\partial V(st)}{\partial n_t}dt$$

erhalten wir auf die gleiche Weise:

$$U(s) = \frac{\pi(y_s - y_t)}{\varrho_0^3(sA)}\frac{b^2}{2} - \frac{3\pi(y_s - y_t)}{2\varrho_0^5(sA)}\left(\frac{5(y_s - y_t)^2}{\varrho^2(sA)} - 3\right)\frac{b^4}{8}.$$

Etwas anders wird die Entwicklung für das letzte der numerisch auszuwertenden Integrale:

$$R(s) = \int_{\text{IV}}^D (\varphi_1(t) - \varphi_1(s))dS(st) = -\int_{\text{IV}}^D (\varphi_1(t) - \varphi_1(s))x(t)\frac{\partial V(st)}{\partial y(t)}dx(t).$$

Hier setzen wir für das Potential:

$$\varphi_1(t) = \frac{b}{2x(t)}.$$

Daß diese Formel das Potential mit genügender Genauigkeit darstellt, erkennen wir folgendermaßen. Es muß das Potential der wirklichen Strömung zwischen den beiden Werten liegen, die das Potential hätte, wenn einmal die ganze Flüssigkeit im Nullpunkte abströmte (dies wäre gerade der oben gegebene Wert), das anderemal die ganze Flüssigkeit in einem Senkenring vom Radius der Öffnung (also gleich 1) abströmte. Diese beiden Werte sind nun, wie man aus den Formeln für das Potential eines Senkpunktes und eines Senkenringes leicht ausrechnet, für den Punkt IV nur um drei Prozent unterschieden, und bei der Durchführung der Rechnung erkennt man dann, daß sich diese Abweichung in den von uns berücksichtigten Dezimalen nicht mehr äußert.

Da $V(st)$ symmetrisch ist in s und t, so erhalten wir die Entwicklung von $V(st)$ nach Potenzen von x_s indem wir in der oben gegebenen Formel s und t vertauschen. Bilden wir dann $\frac{\partial V}{\partial y_t}$ und führen die Integration aus, so erhalten wir für $R(s)$ die Formel:

$$R(s) = \varphi(s)\frac{h(s)}{\varrho_0(st)}\left(1 + \frac{27}{4}\frac{x_s^2}{\varrho_0^4}\right) - \frac{b^2}{2h(s)}\left(1 - \frac{3}{\varrho_0(st)}\right),$$

in der $h_s = -y_s$ gesetzt ist, und für die Abszisse von IV der Wert 3 bereits eingesetzt ist.

§ 3. Die Resultate der Integrationen.

In diesem Paragraphen fasse ich die numerischen Resultate zusammen, die ich bei der Durchführung meiner Methode für die verschiedenen Strahlformen erhalten habe. Es ergaben sich die folgenden Resultate:

Für die Strahlform mit der Asymptote $x = 0{,}75$

Nr.	$y(s)$	$x(s)$	$l(s)$	$\varphi_1(s)$	$\varphi_2(s)$	$\varphi_1 - \varphi_2$
0	0,0	1,0000	0,000	0,362		
1	0,1	0,9076	0,140	0,502	0,500	0,002
2	0,2	0,8662	0,248	0,610	0,602	0,008
3	0,5	0,8014	0,555	0,917	0,904	0,013
4	1,0	0,7634	1,057	1,419	1,407	0,012
6	2,5	0,7503	2,557	2,919	2,917	0,002

Für die Strahlform mit der Asymptote $x = 0{,}80$

Nr.	$y(s)$	$x(s)$	$l(s)$	$\varphi_1(s)$	$\varphi_2(s)$	$\varphi_1 - \varphi_2$
0	0,0	1,0000	0,000	0,408		
1	0,1	0,9261	0,127	0,535	0,553	− 0,018
2	0,2	0,8930	0,233	0,641	0,655	− 0,014
3	0,5	0,8411	0,538	0,946	0,955	− 0,009
4	1,0	0,8107	1,039	1,447	1,454	− 0,007
6	2,5	0,8002	2,539	2,947	2,055	− 0,008

Die Fehler für die zweite und dritte Näherung haben, wie man sieht, verschiedenes Vorzeichen. Dem absoluten Betrage nach sind die Fehler für die *zweite* Näherung kleiner, werden dann aber beim dritten und vierten Punkte für die *dritte* Näherung kleiner. Daß bei dem letzten Punkte die zweite Näherung wieder etwas besser wird, dürfte wohl auf eine besonders ungünstige Fehlerverteilung zurückzuführen sein. Überhaupt kommen für die Korrektion der Strahlform diejenigen Punkte weniger in Betracht, die weit unten im Strahle liegen, denn, wie man leicht ausrechnen kann, wird die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ beliebig klein, wenn man auf dem Strahlrande nur weit genug geht.

Ich habe demgemäß unter Berücksichtigung der Punkte 1—4 für die letzte Näherung die folgende Form gewählt, die sich in der Nähe der Öffnung mehr an die zweite Näherung anschließt, während sie sich später der Asymptote $x = 0{,}78$ nähert, also der dritten Näherung etwas näher liegt. Es ist:

Punkt	1	2	3	4	5	6
$x(s)$	0,913	0,875	0,819	0,790	0,782	0,780
$y(s)$	0,1	0,2	0,5	1,0	1,75	2,5
$l(s)$	0,138	0,245	0,551	1,052	1,802	2,552

Bei dieser letzten Näherung ergaben sich längs des Strahlrandes die folgenden Werte:

Punkt	0	1	2	3	4	6
$\varphi_1(s)$	0,585	0,523	0,630	0,936	1,437	2,937
$\varphi_2(s)$		0,525	0,630	0,939	1,434	2,934
$\varphi_1 - \varphi_2$		− 0,002	0,000	− 0,003	+ 0,003	+ 0,003

Mit diesen Fehlern befinden wir uns innerhalb der überhaupt erreichbaren Genauigkeit (s. unten). Da der Abstand der Asymptote für

die letzte Näherung $x = 0{,}78$ war, so erhalten wir also den Kontraktionskoeffizienten

$$\alpha = 0{,}78^2 = 0{,}61.$$

Es bleibt noch übrig, den möglichen Fehler dieses Wertes abzuschätzen. Eine strenge Abschätzung ist natürlich nicht möglich, da wir überhaupt einen Konvergenzbeweis des Verfahrens nicht gegeben haben. Doch können wir für die wahrscheinliche Fehlergrenze einen Anhalt aus der Größe der Fehler für die der letzten Näherung benachbarte zweite und dritte Näherung finden. Ich habe bereits darauf hingewiesen, daß ich auch für den sicher falschen Fall der aus dem ebenen Problem übernommenen Strahlform die Rechnungen durchgeführt habe. Es ergaben sich dort für die folgenden Punkte (die etwas andere Ordinaten haben als die Punkte, für die in den anderen Näherungen die Integrale gerechnet wurden):

Punkt	2	3	4	6
x	0,7858	0,6896	0,6269	0,6110
y	0,2120	0,5070	1,1256	2,3701
$l(s)$	0,572	0,883	1,506	2,751
$\varphi_1(s)$	0,361	0,633	1,120	2,390
$\varphi_2(s)$	0,209	0,250	0,386	0,361

Aus der Größe der Fehler sehen wir, daß die Differenzen $\varphi_1 - \varphi_2$ jedenfalls sehr stark wachsen, wenn wir uns aus dem Bereiche entfernen, in dem unsere schließlich gewonnene Strahlform liegt.

Um zu sehen, wie stark die Differenzen in der Nähe der letzten Näherung wachsen, betrachten wir $\varphi_1(s) - \varphi_2(s)$ für die zweite und dritte Näherung an den Punkten 1, 2, 3, 4. Diese Differenzen bezeichnen wir mit Δ_2 und Δ_3.

Punkt	1	2	3	4	Asymptote
$\Delta_2 = \varphi_1 - \varphi_2$	0,002	0,008	0,013	0,012	$x = 0{,}75$
$\Delta_3 = \varphi_1 - \varphi_2$	− 0,018	− 0,014	− 0,009	− 0,007	$x = 0{,}80$

Ziehen wir Δ_3 von Δ_2 ab, so erhalten wir

Punkt	1	2	3	4
$\Delta_3 - \Delta_2 =$	0,020	0,022	0,022	0,019

Wir sehen daraus, daß die Differenzen sich im Mittel etwa um 0,020 ändern, wenn wir die Asymptote des Strahles um 0,05 verschieben.

Um nun die Fehlergrenzen für die Lage der Asymptoten zu finden, müssen wir uns klar machen, wie groß etwa die Fehler sein können,

die infolge der graphischen Integrationen bei der Berechnung von $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$ auftreten können.

Die numerischen Rechnungen habe ich mit einer solchen Stellenzahl durchgeführt, daß im Resultat schlimmstenfalls ein Abrundungsfehler von einer Einheit der letzten Dezimale auftreten könnte. Die Tabellen sind alle mehrfach gerechnet, so daß auch das Auftreten von Rechenfehlern sehr unwahrscheinlich wird.

Die eigentliche Fehlerquelle liegt in den Planimetrierungen. Ich habe zur Planimetrierung einen sehr guten Präzisionsplanimeter (Nr. 17487) von G. Coradi (Zürich) benutzt. Die angegebenen Werte der Planimetrierungen sind Mittelwerte aus mindestens 4 Umfahrungen. (Bei gleicher Polstellung wurden die Kurven für die beiden Lagen des Planimeterarmes je einmal vorwärts und rückwärts umfahren.) Es ist nun für die letzte Näherung bloß einmal vorgekommen, daß die Maximal- und Minimalablesung des Planimeters sich um neun Einheiten der letzten Stelle unterschieden. Dabei ist zu bedenken, daß hierin noch der Einfluß einer geringen Ungenauigkeit in der Stellung der Rollenachse des Planimeters liegt, die nach dem Umfahren bei beiden Lagen des Planimeterarmes durch Mittelbildung herausfällt. Die Resultate der Planimetrierungen bei gleicher Stellung des Planimeterarmes unterschieden sich um höchstens vier Einheiten der letzten angegebenen Stelle. Da zur Berechnung von φ auch bei dem ungünstigsten Falle die Angabe des Planimeters noch durch 1,8 dividiert wurde, so erkennen wir, daß die Fehler, die in das Resultat durch mangelhaftes Planimetrieren eingehen, nicht mehr als eine Stelle der letzten Dezimalen ausmachen können. Bedenklicher als diese Fehler sind diejenigen, die in der Zeichnung selbst liegen. Zieht man durch eine Anzahl Punkte eine glatte Kurve, so kann eine Verschiebung der Kurve um ein oder zwei Zehntel Millimeter leicht eintreten, auch dann, wenn eine genügende Anzahl von Punkten gerechnet ist, um überhaupt eine glatte Kurve genügend genau zu bestimmen. (Ich habe auch außer den tabulierten Punkten noch da, wo die Interpolation unsicher wurde, ein paar Punkte gerechnet, um die Fehler zu vermeiden, die auf diese Weise in die Rechnung eingehen.) Ungünstig ist auch, daß diese Fehler möglicherweise alle nach derselben Seite wirken.

Es ist natürlich schwer, einen solchen Fehler abzuschätzen. Für die großen Flächen, deren Umfang groß ist im Verhältnis zum Flächeninhalte, kann es wohl einen Quadratzentimeter ausmachen, was für den φ-Wert einen Fehler bis zu 0,005 ergeben würde. Berücksichtigt man, daß es höchst unwahrscheinlich ist, daß alle Fehler sich summieren, so wird man, ohne zu günstig zu rechnen, den Fehler, der in den Diffe-

renzen $\varphi_1 - \varphi_2$ infolge der graphischen Integrationen auftritt, auf höchstens 0,006 veranschlagen dürfen.

Nun liegen bei der letzten Näherung die berechneten Werte der Differenzen $\varphi_1(s) - \varphi_2(s)$ zwischen $-0{,}003$ und $+0{,}003$ und zwar unregelmäßig, nicht etwa ständig wachsend oder ständig abnehmend. Gemäß der oben gegebenen Abschätzung des Fehlers werden wir also annehmen dürfen, daß auch der für die Korrektion der Asymptotenlage maßgebende Mittelwert dieser Differenz in den Grenzen $-0{,}003$ und $+0{,}003$ liegt. Nun haben wir aber oben gesehen, daß bei einer Verschiebung der Asymptote um 0,05 die Differenzen um 0,020 sich ändern. Einer Unsicherheit der Differenzen um $\pm 0{,}003$ würde demnach eine Unsicherheit der Asymptotenlage um $\pm 0{,}0075$ entsprechen. D. h. es wäre:

$$0{,}7725 \leqq b \leqq 0{,}7875 .$$

Auf zwei Dezimalen abgerundet ergibt das für die Kontraktionszahl die Eingrenzung:

$$\mathbf{0{,}60 \leqq \alpha \leqq 0{,}62 .}$$

Tabelle 1 für die Funktion:

$$G(\xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi - \frac{1 - \xi^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \varphi}}$$

als Funktion von $\alpha = \arcsin \xi$.

α	$G(\xi)$	α	$G(\xi)$	α	$G(\xi)$
0	0,7854	30	0,8353	60	0,9415
2	0,7856	32	0,8416	62	0,9481
4	0,7864	34	0,8481	64	0,9546
6	0,7876	36	0,8549	66	0,9607
8	0,7891	38	0,8617	68	0,9664
10	0,7913	40	0,8688	70	0,9719
12	0,7939	42	0,8761	72	0,9770
14	0,7970	44	0,8835	74	0,9815
16	0,8004	46	0,8908	76	0,9857
18	0,8043	48	0,8982	78	0,9894
20	0,8086	50	0,9056	80	0,9925
22	0,8133	52	0,9131	82	0,9952
24	0,8183	54	0,9204	84	0,9973
26	0,8236	56	0,9275	86	0,9989
28	0,8293	58	0,9346	88	0,9997
30	0,8353	60	0,9415	90	1,0000

Tabelle 2.

Punkt:		6	5	4	3	2	1	0	I	II	III	IV
	x	0,7800	0,7820	0,7900	0,8190	0,8750	0,9130	1,000	1,200	1,500	2,000	3,000
	s	2,5520	1,8020	1,0520	0,5510	0,2450	0,1380	0,000				
IV	$\varrho(st)$	3,938	3,496	3,173	3,045	3,007	3,002					
	$\alpha(\xi)$	8°41′	11°4′	13°37′	15°22′	16°53′	17°42′					
	$E(\xi)$	1,5799	1,5856	1,5933	1,5995	1,6056	1,6092					
	$G(\xi)$	0,7898	0,7927	0,7964	0,7993	0,8021	0,8037					
III	$\varrho(st)$	3,260	2,709	2,267	2,073	2,012	2,003					
	$\alpha(\xi)$	8°26′	12°18′	17°54′	22°24′	25°37′	27°4′					
	$E(\xi)$	1,5794	1,5891	1,6101	1,6329	1,6531	1,6632					
	$G(\xi)$	0,7895	0,7944	0,8041	0,8143	0,8226	0,8266					
II	$\varrho(st)$	2,993	2,384	1,863	1,609	1,520	1,505					
	$\alpha(\xi)$	7°30′	11°55′	19°58′	28°20′	34°37′	37°12′					
	$E(\xi)$	1,5776	1,5880	1,6198	1,6726	1,7275	1,7544					
	$G(\xi)$	0,7887	0,7938	0,8085	0,8303	0,8502	0,8590					
I	$\varrho(st)$	2,862	2,222	1,654	1,354	1,233	1,210					
	$\alpha(\xi)$	6°34′	10°57′	20°16′	32°25′	43°41′	48°27′					
	$E(\xi)$	1,5760	1,5853	1,6214	1,7066	1,8352	1,9087					
	$G(\xi)$	0,7880	0,7925	0,8092	0,8429	0,8823	0,8999					
0	$\varrho(st)$	2,789	2,131	1,536	1,209	1,061	1,024					
	$\alpha(\xi)$	5°45′	9°55′	19°34′	34°5′	51°1′	60°32′					
	$E(\xi)$	1,5748	1,5826	1,6179	1,7222	1,9542	2,1713					
	$G(\xi)$	0,7874	0,7912	0,8076	0,8484	0,9095	0,9433					

1	$\varrho(st)$	2,670	2,010	1,417	1,094	0,949		1,024	1,210	1,505	2,003	3,002
	$\alpha(\xi)$	5°44′	10°11′	21°3′	38°40′	62°30′		60°32′	48°27′	37°12′	27°4′	17°42′
	$E(\xi)$	1,5748	1,5833	1,6255	1,7710	2,2283		2,1713	1,9087	1,7544	1,6632	1,6092
	$G(\xi)$	0,7874	0,7915	0,8110	0,8640	0,9498		0,9433	0,8999	0,8590	0,8266	0,8037
2	$\varrho(st)$	2,568	1,911	1,326	1,013		0,949	1,061	1,233	1,520	2,012	3,007
	$\alpha(\xi)$	5°56′	10°48′	23°9′	44°18′		62°30′	51°1′	43°41′	34°37′	25°37′	16°53′
	$E(\xi)$	1,5750	1,5849	1,6372	1,8439		2,2283	1,9542	1,8352	1,7275	1,6531	1,6056
	$G(\xi)$	0,7876	0,7923	0,8162	0,8846		0,9498	0,9095	0,8823	0,8502	0,8226	0,8021
3	$\varrho(st)$	2,281	1,641	1,093		1,013	1,094	1,209	1,354	1,609	2,073	3,045
	$\alpha(\xi)$	7°3′	13°46′	32°48′		44°18′	38°40′	34°5′	32°25′	28°20′	22°24′	15°22′
	$E(\xi)$	1,5768	1,5938	1,7101		1,8439	1,7710	1,7222	1,7066	1,6726	1,6329	1,5995
	$G(\xi)$	0,7883	0,7966	0,8442		0,8846	0,8640	0,8484	0,8429	0,8303	0,8143	0,7993
4	$\varrho(st)$	1,836	1,246		1,093	1,326	1,417	1,536	1,654	1,863	2,267	3,173
	$\alpha(\xi)$	10°32′	23°27′		32°48′	23°9′	21°3′	19°34′	20°16′	19°58′	17°54′	13°37′
	$E(\xi)$	1,5842	1,6391		1,7101	1,6372	1,6255	1,6179	1,6214	1,6198	1,6101	1,5933
	$G(\xi)$	0,7920	0,8169		0,8442	0,8162	0,8110	0,8076	0,8092	0,8085	0,8041	0,7964
5	$\varrho(st)$	1,241		1,246	1,641	1,911	2,010	2,131	2,222	2,384	2,709	3,496
	$\alpha(\xi)$	23°20′		23°27′	13°46′	10°48′	10°11′	9°55′	10°57′	11°55′	12°18′	11°4′
	$E(\xi)$	1,6384		1,6391	1,5938	1,5849	1,5833	1,5826	1,5853	1,5880	1,5891	1,5856
	$G(\xi)$	0,8166		0,8169	0,7966	0,7923	0,7915	0,7912	0,7925	0,7938	0,7944	0,7927
6	$\varrho(st)$		1,241	1,836	2,281	2,568	2,670	2,789	2,862	2,993	3,260	3,938
	$\alpha(\xi)$		23°20′	10°32′	7°3′	5°56′	5°44′	5°45′	6°34′	7°30′	8°26′	8°41′
	$E(\xi)$		1,6384	1,5842	1,5768	1,5750	1,5748	1,5748	1,5760	1,5776	1,5794	1,5799
	$G(\xi)$		0,8166	0,7920	0,7883	0,7876	0,7874	0,7874	0,7880	0,7887	0,7895	0,7898

Tabelle 3.

Punkt		6	5	4	3	2	1	0	I	II	III	IV
IV	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E \cdot l : \varrho$	1,024	0,817	0,528	0,289	0,131	0,074					
	$\vartheta^*(st)$	81°53′	63°6′	39°8′	20°23′	8°20′	4°13′					
	$\varrho \cdot G \cdot l : x_s$	2,646	1,665	0,886	0,447	0,197	0,111					
III	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E \cdot l : \varrho$	1,236	1,057	0,747	0,434	0,201	0,115					
	$\vartheta^*(st)$	105°57′	87°20	59°17′	33°0′	14°4′	7°13′					
	$\varrho \cdot G \cdot l : x_s$	3,284	1,940	0,959	0,465	0,203	0,115					
II	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E \cdot l : \varrho$	1,345	1,201	0,915	0,573	0,278	0,161					
	$\vartheta^*(st)$	121°34′	105°11′	78°12′	48°27′	22°34′	12°2′					
	$\varrho \cdot G \cdot l : x_s$	4,016	2,273	1,056	0,491	0,211	0,119					
I	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E \cdot l : \varrho$	1,405	1,286	1,031	0,695	0,365	0,218					
	$\vartheta^*(st)$	132°5′	118°1′	94°23′	66°37′	37°6′	21°56′					
	$\varrho \cdot G \cdot l : x_s$	4,796	2,644	1,173	0,524	0,222	0,125					
0	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E \cdot l : \varrho$	1,441	1,338	1,108	0,785	0,451	0,293					
	$\vartheta^*(st)$	139°3′	127°23′	107°19′	85°28′	64°5′	51°59′					
	$\varrho \cdot G \cdot l : x_s$	5,604	3,039	1,305	0,565	0,236	0,133					

1	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E\cdot[\varphi_t-\varphi_s]:\varrho$	1,424	1,311	1,049	0,668	0,251		0,293				
	$\vartheta^*(st)$	141°38′	129°41′	110°4′	89°46′	72°24′		45°59′	16°30′	7°18′	3°17′	1°17′
	$\varrho\cdot G\cdot[\varphi_t-\varphi_s]$	5,080	2,647	1,050	0,391	0,098		0,133	0,258	0,408	0,600	1,012
2	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E\cdot[\varphi_t-\varphi_s]:\varrho$	1,415	1,291	0,996	0,557		0,251	0,451				
	$\vartheta^*(st)$	141°54′	129°39′	109°36′	89°29′		66°0′	51°55′	26°6′	12°56′	6°6′	2°26′
	$\varrho\cdot G\cdot[\varphi_t-\varphi_s]$	4,667	2,358	0,874	0,275		0,098	0,237	0,375	0,532	0,777	1,269
3	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E\cdot[\varphi_t-\varphi_s]:\varrho$	1,383	1,215	0,784		0,557	0,668	0,785				
	$\vartheta^*(st)$	140°14′	126°17′	103°57′		69°23′	63°46′	54°44′	38°47′	24°7′	12°54′	5°27′
	$\varrho\cdot G\cdot[\varphi_t-\varphi_s]$	3,597	1,636	0,462		0,275	0,391	0,565	0,742	0,959	1,308	2,025
4	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E\cdot[\varphi_t-\varphi_s]:\varrho$	1,294	0,986		0,784	0,996	1,049	1,108				
	$\vartheta^*(st)$	133°19′	114°53′		69°25′	58°16′	54°22′	48°57′	41°1′	31°2′	19°51′	9°34′
	$\varrho\cdot G\cdot[\varphi_t-\varphi_s]$	2,181	0,764		0,462	0,874	1,050	1,306	1,540	1,837	2,326	3,370
5	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E\cdot[\varphi_t-\varphi_s]:\varrho$	0,990		0,986	1,215	1,291	1,311	1,338				
	$\vartheta^*(st)$	115°30′		63°53′	50°19′	43°29′	41°13′	38°25′	35°7′	30°13′	23°0′	13°26′
	$\varrho\cdot G\cdot[\varphi_t-\varphi_s]$	0,759		0,764	1,636	2,358	2,647	3,039	3,349	3,726	4,359	5,772
6	y	2,50	1,75	1,00	0,50	0,20	0,10	0,00				
	$E\cdot[\varphi_t-\varphi_s]:\varrho$		0,990	1,294	1,383	1,415	1,424	1,441				
	$\vartheta^*(st)$		64°12′	45°55′	37°32′	33°22′	32°2′	30°25′	28°51′	26°18′	22°1′	14°55′
	$\varrho\cdot G\cdot[\varphi_t-\varphi_s]$		0,760	2,181	3,600	4,668	5,077	5,603	5,979	6,417	7,146	8,813

Resultate der graphischen und numerischen Integrationen für die Strahlform mit der Asymptote $x = 0{,}78$.

1. Koordinaten der Punkte auf dem Strahle, für die $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$ bestimmt wurden.

$-y$	0,00	0,10	0,20	0,50	1,00	1,75	2,50
x	1,0000	0,9130	0,8750	0,8190	0,7900	0,7820	0,7800
l	0,0000	0,1380	0,2450	0,5510	1,0520	1,8020	2,5520

2. Bestimmung von $\varphi_1(s)$ für die Punkte des festen Randes $y = 0$, $x = 1{,}0;\ 1{,}2;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 3{,}0$.

	0	I	II	III	IV
$Y(s)$	2,704	2,542	2,306	1,974	1,488
$\Theta(s)$	− 2,143	− 2,259	− 2,188	− 1,952	− 1,508
$T(s)$	0,349	0,340	0,324	0,297	0,245
$l(6)\,U(s)$	0,299	0,277	0,242	0,186	0,103
$\pi\varphi_1(s)$	1,209	0,900	0,684	0,505	0,328
$\varphi_1(s)$	0,385	0,286	0,218	0,161	0,104

Daraus für die Punkte des Strahlrandes $\varphi_1(s) = \varphi_1(0) + l(s)$

0	1	2	3	4	5	6
0,585	0,523	0,630	0,936	1,437	2,184	2,934

3. Bestimmung von $\varphi_2(s)$ für die Punkte auf dem Strahle.

	1	2	3	4	6
$Y(s)$	2,509	2,339	1,763	0,620	− 2,718
$\Theta(s)$	− 1,586	− 1,192	− 0,081	+ 1,492	+ 4,453
$T(s)$	0,365	0,380	0,431	0,544	1,560
$[\varphi(6) - \varphi(s)]\,U(s)$	0,312	0,323	0,355	0,409	0,000
$R(s)$	0,050	0,129	0,481	1,438	5,922
$\pi\varphi_2(s)$	1,650	1,979	2,949	4,503	9,217
$\varphi_2(s)$	0,525	0,630	0,939	1,434	2,934
$\varphi_1(s)$	0,523	0,630	0,936	1,437	2,937
$\varphi_2 - \varphi_1$	− 0,002	0,000	− 0,003	+ 0,003	+ 0,003

Für das endgültige Resultat siehe Seite 47 bis 51.

Lebenslauf.

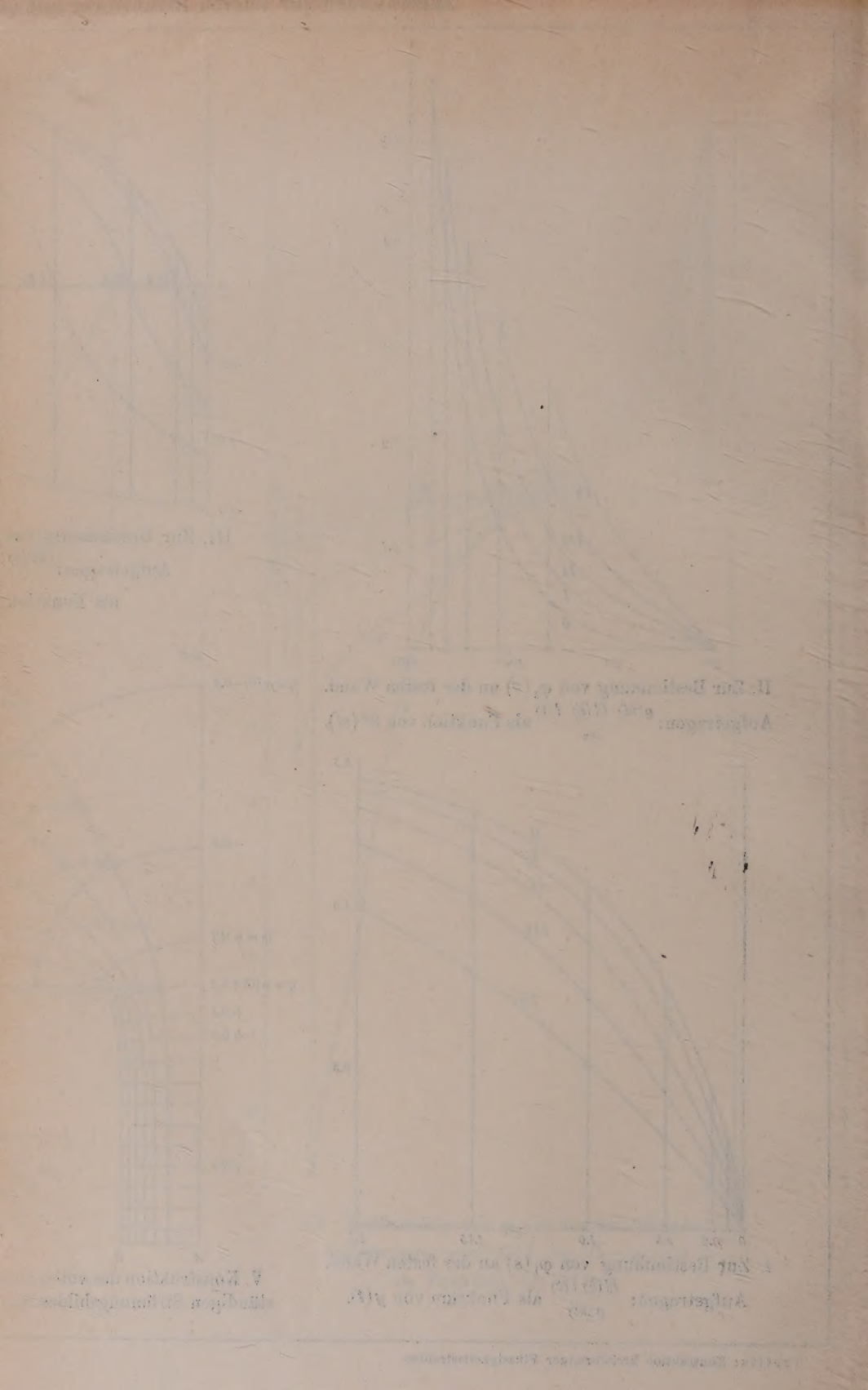
Ich, Erich Immanuel Trefftz, bin am 21. Februar 1888 als Sohn des Kaufmanns Oskar I. Trefftz in Leipzig (Kgr. Sachsen) geboren.

Ich habe die folgenden Schulen besucht: Von Ostern 1894 bis Ostern 1897 die vierte städtische Bürgerschule zu Leipzig, von Ostern 1897 bis Ostern 1900 die Thomasschule zu Leipzig, von Ostern 1900 bis Ostern 1906 das Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Aachen.

Nach dem Abiturientenexamen habe ich in der Maschinenfabrik von Neumann & Esser, Aachen, sieben Monate praktisch gearbeitet und dann an der Kgl. Technischen Hochschule in Aachen vom Herbst 1906 bis Herbst 1908 zwei Semester Maschinenbau und zwei Semester Mathematik und Physik studiert.

Vom Herbst 1908 bis Herbst 1909 und im Sommer 1910 habe ich in Göttingen und vom Herbst 1910 bis Herbst 1912 in Straßburg Mathematik und Physik studiert.

Vom Januar 1909 bis Juli 1910 bin ich bei Herrn Professor Dr. C. Runge in Göttingen Hilfsassistent gewesen, und war in dieser Eigenschaft mit Herrn Professor Runge im Wintersemester 1909/1910 an der Columbia-Universität in New York.

Zurzeit bin ich als Assistent an der mathematischen Sammlung der Kgl. Technischen Hochschule in Aachen angestellt.

Für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für vielfache, freundliche Unterstützung bei der Ausführung bin ich Herrn Professor von Mises in Straßburg zu dauerndem Danke verpflichtet.